

Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
woensdag 3 november 2021, 18:00-19:30

Naam:

Studierichting + reeksnr:

Naam van assistent:

(Assistenten zijn Niels Bonneux, Milan Donvil, Alan Groot, Lukas Rollier)

- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Werk eerst uw antwoorden in klad uit en zet ze daarna net op papier. Geef uw antwoorden in volledige goed lopende zinnen.
- Puntenverdeling per vraag:

Vraag 1: 5 pt

Vraag 2: (a) 3 pt (b) 4 pt (c) 8 pt

Vraag 3: (a) 3 pt (b) 3 pt (c) 4 pt

Scoretabel (NIET INVULLEN!)

Vraag 1 (op 5)		Totaal (op 30)	
Vraag 2 (op 15)			
Vraag 3 (op 10)		Bonus op TTT (0, 1, 1.5 of 2)	

- Als u de toets voldoende maakt, behaalt u een bonus voor het examen van Bewijzen en Redeneren:
 - Bij minstens 15 op 30: 1 punt bonus
 - Bij minstens 20 op 30: 1,5 punt bonus
 - Bij minstens 25 op 30: 2 punten bonus
- Succes!

Vraag 1.

Geef de ontkenning van de volgende bewering over een verzameling X

$$\exists x \in X : \forall A \in P(X) : x \in A \wedge [\exists y \in X : y \neq x \implies y \in A]$$

waarbij u geen gebruik maakt van $\neg$ of $\implies$.

Antwoord 1. De ontkenning is

$$\forall x \in X : \exists A \in P(X) : x \notin A \vee [\forall y \in X : y \neq x \wedge y \notin A]$$

Naam:

Studierichting:

Vraag 2. Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie, $A \in P(X)$ en $y \in Y$.

- (a) Wat is de definitie van $f(A)$ en $f^{-1}(y)$?
- (b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de implicatie

$$y \in f(A) \implies f^{-1}(y) \subset A$$

niet hoeft te gelden.

- (c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall y \in Y : y \in f(A) \implies f^{-1}(y) \subset A$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Antwoord 2. (a) De definities zijn

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

en

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Let op dat $f(A)$ een deelverzameling van Y is en dat $f^{-1}(y)$ een deelverzameling van X is.

(b) Een mogelijk voorbeeld wordt gegeven door $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, de functie $f : X \rightarrow Y$ gegeven door $f(1) = f(2) = 3$, de verzameling $A = \{1\}$ en het element $y = 3$.

Dan is $f(A) = \{f(1)\} = \{3\}$ en $f^{-1}(y) = f^{-1}(3) = \{1, 2\}$. Bijgevolg is $y \in f(A)$, maar de inclusie $f^{-1}(y) \subset A$ geldt niet. Daarom is de implicatie

$$y \in f(A) \implies f^{-1}(y) \subset A$$

in dit voorbeeld niet juist.

(c) We moeten een equivalentie bewijzen en om dat te doen gaan we twee implicaties aantonen. Het gaat hier om de twee beweringen

$$P : \forall A \in P(X) : \forall y \in Y : y \in f(A) \implies f^{-1}(y) \subset A$$

$$Q : f \text{ is injectief.}$$

We bewijzen eerst dat $P \implies Q$ en vervolgens dat $Q \implies P$.

Bewijs dat $P \implies Q$ Neem aan dat P geldt. Dus voor elke $A \subset X$ en $y \in Y$ geldt de implicatie

$$y \in f(A) \implies f^{-1}(y) \subset A. \quad (1)$$

Om aan te tonen dat f injectief is, kiezen we willekeurig x_1, x_2 uit X met $x_1 \neq x_2$. We nemen $A = \{x_2\}$ en $y = f(x_2)$. De implicatie (1) geldt in het bijzonder voor deze keuze van A en y .

Het is eenvoudig in te zien dat $y \in f(A)$. Vanwege de implicatie (1) volgt daaruit dat ook $f^{-1}(y) \subset A$. Omdat $x_1 \neq x_2$ is $x_1 \notin A$. Omdat $f^{-1}(y) \subset A$ is dan ook $x_1 \notin f^{-1}(y)$. Dit betekent dat $f(x_1) \neq y$ en vanwege de keuze van $y = f(x_2)$ is dus $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Uit $x_1 \neq x_2$ volgt bijgevolg dat $f(x_1) \neq f(x_2)$ en hiermee is bewezen dat f injectief is. De implicatie $P \implies Q$ is bewezen.

Bewijs dat $Q \implies P$ We nemen nu omgekeerd aan dat Q geldt. Dus dat f injectief is.

Om P te bewijzen, kiezen we $A \in P(X)$ en $y \in Y$ willekeurig, en we nemen aan dat $y \in f(A)$. We moeten aantonden dat $f^{-1}(y) \subset A$.

Kies daartoe $x \in f^{-1}(y)$ willekeurig. Dat betekent $f(x) = y$. Omdat $y \in f(A)$ volgt dat $f(x) \in f(A)$. Er bestaat dan een $a \in A$ met $f(x) = f(a)$. Omdat f injectief is, volgt nu dat $x = a$ en dus $x \in A$. Omdat $x \in f^{-1}(y)$ willekeurig gekozen was, is bewezen dat $f^{-1}(y) \subset A$.

Uit $y \in f(A)$ volgt dus dat $f^{-1}(y) \subset A$ en omdat $A \in P(X)$ en $y \in Y$ willekeurig gekozen waren is de uitspraak P bewezen.

De implicatie $Q \implies P$ is nu ook bewezen.

Naam:

Studierichting:

Vraag 3. In deze opgave is X een verzameling en Q een vast gekozen deelverzameling van X . We bekijken de volgende relatie op $P(X)$

$$R = \{(A, B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subset B \cup Q\}.$$

Merk op dat de relatie afhangt van de keuze van $Q \subset X$.

- (a) Is R reflexief, symmetrisch, transitief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
- (b) Bewijs dat $S = R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is.
- (c) Neem $X = \{1, 2, 3, 4\}$ en $Q = \{1, 3\}$.

Hoeveel equivalentieklassen heeft in dit geval de equivalentierelatie S uit onderdeel (b)? Motiveer uw antwoord.

Antwoord 3. (a) R is reflexief, transitief, maar niet noodzakelijk symmetrisch.

Bewijs dat R reflexief is Neem $A \in P(X)$ willekeurig. Dan geldt zeker $A \subset A \cup Q$ en vanwege de definitie van R zien we dat $(A, A) \in R$.

Omdat A willekeurig gekozen was is bewezen dat R reflexief is.

Bewijs dat R niet symmetrisch is Hier is een mogelijk voorbeeld dat aantoont dat R niet noodzakelijk symmetrisch is. Neem $X = \mathbb{R}$, $Q = [0, 1]$, $A = \emptyset$ en $B = \{2\}$. Dan geldt $A \cup Q = [0, 1]$ en $B \cup Q = [0, 1] \cup \{2\}$ en het is duidelijk dat $A \subset B \cup Q$, maar $B \not\subset A \cup Q$. Bijgevolg is $(A, B) \in R$, maar $(B, A) \notin R$.

De relatie is dus niet symmetrisch.

Bewijs dat R transitief is Neem $A, B, C \in P(X)$ willekeurig met $(A, B) \in R$ en $(B, C) \in R$. Er geldt bijgevolg $A \subset B \cup Q$ en $B \subset C \cup Q$. Dan is ook

$$A \subset B \cup Q \subset (C \cup Q) \cup Q = C \cup Q$$

zodat $(A, C) \in R$.

Omdat A, B en C willekeurig gekozen waren volgt hieruit dat de relatie R transitief is.

(b) We gaan laten zien dat $R \cap R^{-1}$ reflexief, symmetrisch en transitief is, waarbij we gebruiken dat R reflexief en transitief is. Dit hebben we namelijk zojuist in onderdeel (a) aangetoond.

Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ reflexief is: Neem $A \in P(\mathbb{R})$ willekeurig. Omdat R reflexief is, geldt $(A, A) \in R$. Dan geldt vanwege de definitie van R^{-1} dat ook $(A, A) \in R^{-1}$. Dus $(A, A) \in R \cap R^{-1}$, en er is bewezen dat $R \cap R^{-1}$ reflexief is.

Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ symmetrisch is: Neem $A, B \in P(\mathbb{R})$ willekeurig en neem aan dat $(A, B) \in R \cap R^{-1}$. Dan is dus $(A, B) \in R$ en $(A, B) \in R^{-1}$. Vanwege de definitie van R^{-1} volgt dan dat $(B, A) \in R^{-1}$ en $(B, A) \in R$. Dus $(B, A) \in R \cap R^{-1}$.

We hebben bewezen

$$\forall A \in P(\mathbb{R}) : \forall B \in P(\mathbb{R}) : (A, B) \in R \cap R^{-1} \implies (B, A) \in R \cap R^{-1}$$

en dit betekent dat $R \cap R^{-1}$ symmetrisch is.

Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ transitief is: Neem $A, B, C \in P(\mathbb{R})$ willekeurig en neem aan dat $(A, B) \in R \cap R^{-1}$ en $(B, C) \in R \cap R^{-1}$.

Dan is in het bijzonder $(A, B) \in R$ en $(B, C) \in R$. Omdat R transitief is, volgt hieruit dat $(A, C) \in R$.

Ook zien we dat $(A, B) \in R^{-1}$ en $(B, C) \in R^{-1}$. Dit betekent dat $(B, A) \in R$ en $(C, B) \in R$. Omdat R transitief is volgt hieruit dat $(C, A) \in R$ en dus $(A, C) \in R^{-1}$.

Omdat $(A, C) \in R$ en $(A, C) \in R^{-1}$ concluderen we dat $(A, C) \in R \cap R^{-1}$. We hebben bewezen dat $R \cap R^{-1}$ transitief is.

(c) Er zijn 4 equivalentieklasse in het geval dat $X = \{1, 2, 3, 4\}$ en $Q = \{1, 3\}$, maar dit antwoord moet gemotiveerd worden.

We schrijven $A \sim B$ in plaats van $(A, B) \in S$. Uit de definitie van S en R volgt dat

$$A \sim B \iff (A \subset B \cup Q \wedge B \subset A \cup Q). \quad (2)$$

Om een idee te krijgen hoe een equivalentieklasse er uit ziet beginnen we met de equivalentieklasse van de lege verzameling. Uit (2) volgt dat $\emptyset \sim B$ als en slechts als $\emptyset \subset B \cup Q$ en $B \subset \emptyset \cup Q = Q$. Aan de voorwaarde $\emptyset \subset B \cup Q$ is altijd voldaan en dus is er alleen de voorwaarde $B \subset Q$. Bijgevolg

$$[\emptyset]_S = P(Q) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}. \quad (3)$$

Dit is de eerste equivalentieklasse van de equivalentierelatie S die we gevonden hebben.

Laten we nu $A = X$ nemen en we vragen ons af wat de equivalentieklasse van X is. Uit (2) volgt dat $X \sim B$ als en slechts als $X \subset B \cup Q$ en $B \subset X \cup Q = X$. Aan $B \subset X$ is altijd voldaan en $X \subset B \cup Q$ is hetzelfde als $X = B \cup Q$ (want B en Q zijn sowieso deelverzamelingen van X). Als we aan B de verzameling $Q = \{1, 3\}$ toevoegen moeten we de hele verzameling $X = \{1, 2, 3, 4\}$ krijgen. Zo vinden we de tweede equivalentieklasse

$$[X]_S = \{\{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}. \quad (4)$$

De twee equivalentieklassen (3) en (4) hebben samen 8 elementen. Dit is nog niet alles want $P(X)$ heeft $2^{|X|} = 2^4 = 16$ elementen. Neem een element van $P(X)$ dat we nog niet hebben, bv. $\{2\}$ en we vragen ons wat hiervan de equivalentieklasse is.

Als we $A = \{2\}$ in (2) nemen dan zien we dat $\{2\} \sim B$ als en slechts als $\{2\} \subset B \cup Q$ en $B \subset \{2\} \cup Q$. Omdat $2 \notin Q$ betekent $\{2\} \subset B \cup Q$ dat $2 \in B$ en $B \subset \{2\} \cup Q$ betekent

uiteraard $B \subset \{1, 2, 3\}$. Dus B moet een deelverzameling van $\{1, 2, 3\}$ zijn dat 2 bevat. We vinden de volgende equivalentieklasse

$$[\{2\}]_S = \{\{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}. \quad (5)$$

Op dezelfde manier vinden we de equivalentieklasse van $\{4\}$.

$$[\{4\}]_S = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}. \quad (6)$$

We hebben nu 4 equivalentieklassen gevonden, die een partitie van $P(X)$ vormen. We kunnen namelijk eenvoudig nagaan dat elke deelverzameling van X voorkomt in precies één van de equivalentieklassen (3)–(6).

We kunnen dit ook inzien door een telargument. Elke equivalentieklasse (3)–(6) heeft 4 elementen. De equivalentieklassen zijn onderling disjunct en in totaal bevatten ze dus $4 \cdot 4 = 16$ elementen. Omdat $|P(X)| = 2^4 = 16$ komt elk element van $P(X)$ precies één keer voor.

We hebben bijgevolg alle equivalentieklassen gevonden. Er zijn inderdaad 4 equivalentieklassen.