Tussentijdse Toets Wiskunde II
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie
Geografie, Geologie en Informatica
april 2012

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst.
- Er zijn drie vragen. De eerste twee gaan over lineaire algebra en de laatste over reeksen. De derde vraag is niet bestemd voor geografie studenten.
- U maakt deze toets thuis op een moment dat het u past. Om deze toets een zinvolle voorbereiding te laten zijn op het examen, dient u zo veel mogelijk de omstandigheden van het echte examen te volgen. Dit wil zeggen:
  - Reserveer een periode van 3 uur om omgestoord aan de vragen te werken.
  - U mag gebruik maken van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, symbolisch is niet toegestaan) en de cursustekst (Wiskunde I en Wiskunde II). U mag **niet** gebruik maken van eigen aantekeningen of uitgewerkte oefeningen.
  - Werk de antwoorden eerst op klad uit. Schrijf de uiteindelijke antwoorden duidelijk leesbaar op. Begin het antwoord onder het blad met de desbetreffende vraag en vul eventueel aan met extra bladen. Vermeld uw naam op elk blad.
- Lever de toets in tijdens een oefenzitting van week 9 of 10 van het semester (23 april–4 mei 2012).
- Succes!

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}$$

met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$$

met p een vast reëel getal.

(a) Voor welke $p \in \mathbb{R}$ zijn de vectoren lineair afhankelijk ?

(b) Bereken de oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door $\vec{b}$ en $\vec{c}$. Voor welke p is deze oppervlakte minimaal?

(c) Geef alle oplossingen $\vec{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T$ van

$$A\vec{x} = A^T\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

waarin A^T de getransponeerde matrix is.

Vraag 2 Beschouw een model voor de populatie van twee soorten virussen X en Y. Het aanwezige aantal van soort X na n weken geven we aan met x_n en dat van soort Y met y_n. We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + qy_n \qquad \text{en} \qquad y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + y_n.$$

Hierin is $q \in \mathbb{R}$ een constante.

(a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van q).

(b) Voor welke waarden van $q \in \mathbb{R}$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?

(c) Voor welke q is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $a_0 = 2010$ en $b_0 = 0$.

Vraag 3 (niet voor geografie)

(a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \ln(1 + 2x^2)$$

Wat is de convergentiestraal van deze Maclaurinreeks?

(b) Bereken de Fourierreeks van de 2π-periodieke functie g die op $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$