

## Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde  
donderdag 31 oktober 2024, 8:30-10:00

**Vraag 1** Zij  $X$  een verzameling en  $A \subset X$  een vast gekozen deelverzameling van  $X$ .  
We definiëren een relatie  $R$  op de verzameling  $P(X)$  door te stellen dat

$$(B, C) \in R \quad \text{als en slechts als} \quad B \setminus C \subset A.$$

Zijn de volgende beweringen waar?

- (a)  $R$  is reflexief.
- (b)  $R$  is symmetrisch.
- (c)  $R$  is transitief.

Bewijs de ware beweringen en geef een tegenvoorbeeld voor de niet-ware beweringen.

- (d) De relatie  $R \cap R^{-1}$  is een equivalentierelatie. Dit hoeft u niet te bewijzen.

Bepaal het aantal equivalentieklassen van de equivalentierelatie  $R \cap R^{-1}$  voor het geval dat  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en  $A = \{4, 5\}$ . Motiveer uw antwoord.

### Antwoord:

- (a) De relatie  $R$  is reflexief.

Neem  $B \in P(X)$  willekeurig. Dan is  $B \setminus B = \emptyset$  en daarom is  $B \setminus B \subset A$ . Uit de definitie van  $R$  volgt dus dat  $(B, B) \in R$ . We concluderen dat  $R$  reflexief is.

- (b) De relatie  $R$  is niet symmetrisch. Een mogelijk tegenvoorbeeld is het volgende.

Neem aan dat  $A \neq X$ ,  $B = \emptyset$  en  $C = X$ . Dan is  $B \setminus C = \emptyset$  en  $C \setminus B = X$ . We zien dat  $B \setminus C \subset A$ , maar  $C \setminus B \not\subset A$ . Dus  $(B, C) \in R$ , maar  $(C, B) \notin R$ . De relatie  $R$  is niet symmetrisch.

- (c) De relatie  $R$  is transitief. Neem drie verzamelingen  $B, C, D$  in  $P(X)$  met  $(B, C) \in R$  en  $(C, D) \in R$ . Er geldt dus dat  $B \setminus C \subset A$  en  $C \setminus D \subset A$ . We gaan bewijzen dat  $B \setminus D \subset A$ .

Neem  $x \in B \setminus D$  willekeurig. Dan is  $x \in B$  en  $x \notin D$ . Er zijn nu twee mogelijkheden, nl.,  $x \in C$  en  $x \notin C$ .

**Geval  $x \in C$ :** Neem aan dat  $x \in C$ . Omdat  $x \notin D$  geldt er dan  $x \in C \setminus D$ . Omdat  $C \setminus D \subset A$  volgt dat  $x \in A$ .

**Geval  $x \notin C$ :** Neem aan dat  $x \notin C$ . Omdat  $x \in B$  geldt er dan  $x \in B \setminus C$ . Omdat  $B \setminus C \subset A$ , volgt ook in dit geval dat  $x \in A$ .

In beide gevallen volgt  $x \in A$ . Dit geldt voor elke  $x \in B \setminus D$  en daarom is bewezen dat  $B \setminus D \subset A$ . Bijgevolg is  $(B, D) \in R$ . De relatie  $R$  is transitief.

(d) Het koppel  $(B, C)$  behoort tot de relatie  $R \cap R^{-1}$  als en slechts als zowel  $B \setminus C \subset A$  als  $C \setminus B \subset A$ , dat wil zeggen als en slechts als

$$(B \setminus C) \cup (C \setminus B) \subset A. \quad (1)$$

Ik beweer dat aan (1) voldaan is als en slechts als

$$B \setminus A = C \setminus A. \quad (2)$$

Laten we dat eerst gaan bewijzen. We bewijzen twee implicaties.

**Bewijs van (1)  $\implies$  (2):** Veronderstel dat (1) geldt. Neem  $x \in B \setminus A$  willekeurig. Dan is  $x \in B$  en  $x \notin A$ . Als  $x$  niet in  $C$  zou zitten, dan zou  $x \in B \setminus C \subset A$ , hetgeen leidt tot een tegenspraak, want  $x \notin A$ . Dus  $x \in C$ . We hebben ook dat  $x \notin A$  en bijgevolg geldt  $x \in C \setminus A$ . Omdat  $x \in B \setminus A$  willekeurig gekozen was volgt  $B \setminus A \subset C \setminus A$ .

De andere inclusie  $C \setminus A \subset B \setminus A$  volgt op dezelfde manier. De eerste implicatie is bewezen.

**Bewijs van (2)  $\implies$  (1):** Veronderstel dat (2) geldt. We bewijzen (1) uit het ongerijmde. Stel dat (1) niet geldt. Dan is er een element  $x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$  dat geen element van  $A$  is.

Dan is  $x \in B \setminus C$  of  $x \in C \setminus B$ . Beschouw het geval dat  $x \in B \setminus C$ . Dan is  $x \in B$  en  $x \notin C$ , en we hadden ook al dat  $x \notin A$ . Dan is  $x \in B \setminus A$ , maar  $x \notin C \setminus A$ . Dit is in tegenspraak met de gelijkheid (2).

Op analoge manier krijgen we een tegenspraak in het geval dat  $x \in C \setminus B$ .

We zien dat de aanname dat (1) niet geldt altijd tot een tegenspraak leidt. De conclusie is dat (1) wel geldt, en de tweede implicatie is ook bewezen.

Er volgt nu dat  $C$  behoort tot de equivalentieklasse van  $B$  als en slechts als (2) geldt. Alle elementen van  $A$  halen we uit  $B$  en  $C$  en dan moeten de verzamelingen gelijk zijn. In het bijzonder  $C$  equivalent van  $C \setminus A$ . Elke equivalentieklasse bevat dus een element  $B \subset A^c$ .

Als  $B \subset A^c$  dan heeft  $B$  geen elementen van  $A$  en er volgt dat  $B$  equivalent is met  $C$  als en slechts als  $C = B \cup D$  met  $D \subset A$ . Dit leidt tot de equivalentieklasse (in het geval van  $A = \{4, 5\}$ , zoals in Vraag (d)),

$$[B]_{R \cap R^{-1}} = \{B, B \cup \{4\}, B \cup \{5\}, B \cup \{4, 5\}\}.$$

Voor elke  $B \subset A^c = \{1, 2, 3\}$  krijgen we zo een equivalentieklasse, en deze equivalentieklassen zijn allemaal verschillend (en ook disjunct). Er zijn  $2^3 = 8$  deelverzamelingen van  $\{1, 2, 3\}$  en we hebben dus 8 equivalentieklassen gevonden. Omdat elke equivalentieklasse een element  $B$  bevat met  $B \subset A^c$ , zijn er geen andere equivalentieklassen.

We concluderen dat er 8 equivalentieklassen zijn. Elke equivalentieklasse heeft 4 elementen.

**Vraag 2** Zij  $f : X \rightarrow Y$  een functie en  $A \in P(X)$ ,  $B \in P(Y)$ .

(a) Laat door middel van een voorbeeld zien dat de implicatie

$$B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A$$

niet altijd hoeft te gelden.

(b) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : [B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A]$$

geldt als en slechts als  $f$  injectief is.

**Antwoord:**

(a) Hier is een mogelijk voorbeeld.

Neem  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{a\}$  en  $f : X \rightarrow Y$  met  $f(1) = f(2) = a$ . Neem ook  $A = \{1\}$  en  $B = \{a\}$ . Dan is  $f(A) = \{a\}$  en  $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ . We zien dat  $B \subset f(A)$  geldt, maar  $f^{-1}(B) \subset A$  geldt niet. De implicatie uit onderdeel (a) is dus niet waar in dit voorbeeld.

(b) We moeten twee implicaties bewijzen, namelijk

$$[\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : [B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A]] \implies f \text{ is injectief} \quad (3)$$

en

$$f \text{ is injectief} \implies [\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : [B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A]]. \quad (4)$$

**Bewijs van (3):** Veronderstel dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : [B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A] \quad (5)$$

geldt. We gaan bewijzen dat  $f$  injectief is.

Neem  $x_1, x_2 \in X$  willekeurig en veronderstel dat  $f(x_1) = f(x_2)$ . Neem  $A = \{x_1\}$  en  $B = \{f(x_1)\}$ . Dan is  $B \subset f(A)$ . Uit (5) volgt dan dat  $f^{-1}(B) \subset A$ . Omdat  $f(x_2) = f(x_1) \in B$  geldt  $x_2 \in f^{-1}(B)$ . Vanwege  $f^{-1}(B) \subset A$  is dan ook  $x_2 \in A$ . Omdat  $A = \{x_1\}$  volgt hieruit dat  $x_2 = x_1$ .

We hebben bewezen dat

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

en dit betekent dat  $f$  injectief is.

**Bewijs van (4):** Veronderstel dat  $f$  injectief is. Neem  $A \in P(X)$  en  $B \in P(Y)$  willekeurig. Veronderstel dat  $B \subset f(A)$ . We gaan nu bewijzen dat  $f^{-1}(B) \subset A$ .

Neem daartoe  $x \in f^{-1}(B)$  willekeurig. Dan is  $f(x) \in B$ . Omdat  $B \subset f(A)$  is dan ook  $f(x) \in f(A)$ . Er is bijgevolg  $a \in A$  met  $f(x) = f(a)$ . Omdat  $f$  injectief is, volgt hieruit dat  $x = a$ . Omdat  $a \in A$  geldt dus  $x \in A$ . De inclusie  $f^{-1}(B) \subset A$  is hiermee bewezen. Omdat  $A \in P(X)$  en  $B \in P(Y)$  willekeurig gekozen was volgt dat

$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(Y) : [B \subset f(A) \implies f^{-1}(B) \subset A]$$

en de implicatie (4) is bewezen.