

TTT diff 17-12-2024

Auteur: Dat ga ik niet aan jouw neus hangen

17 December 2024

1 Oefeningen

Vraag 1 (4p)

Beschouw voor λ^1 de volgende differentiaalvergelijking met randvoorwaarden

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda^2 u &= 0 \\ u(0) &= 0 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) dt &= 0\end{aligned}$$

voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Voor welke λ^2 heeft deze vergelijking een niet triviale oplossing? Beargumenteer ook waarom sommige waarden van λ geen niet-triviale oplossing kunnen geven.

Vraag 2 (6p)

Beschouw volgende diffusievergelijking voor een staaf van lengte 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(2\pi x) \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 3 \sin(4\pi x) + 5 \sin(9\pi x) \quad (3)$$

voor $0 < x < 1$ en $t > 0$.

¹De oplettende lezer bemerkt hier dat er helemaal niet gespecificeerd is in welke verzameling λ zit. Wanneer er aan de prof uitleg hierover gevraagd werd was het antwoord *shrugs*. De eerder vermeldde oplettende lezer mag dus lekker zelf beslissen in welke verzameling λ zit. De chille lezer neemt hier $\lambda \in \mathbb{R}$ aan. De minder chille lezer mag hier $\lambda \in \mathbb{C}$ aannemen. De waarlijk rare lezer kan dan natuurlijk ook weer $\lambda \in \mathbb{O}^{(n \times p)}$ nemen voor $n, p \in \mathbb{H}$, wat dat ook zou mogen betekenen.

a) (2p) Toont ² aan dat de substitutie $w(x, t) = u(x, t) - \phi(x)$ met u een oplossing van (1) en $\phi(x) = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \sin(2\pi x)$ het probleem reduceert tot

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4)$$

b) (1p) Bepaal de randvoorwaardes en de beginvoorwaarde voor $w(x, t)$

c) (2p) Bepaal de oplossing voor $w(x, t)$.

d) (1p) Geef de algemene oplossing voor $u(x, t)$.

²Ja ik wil je gewoon ambeteren met spelling, maar ik ben niet ongeletterd!

2 Oplossingen

2.1 Vraag 1

De fijne lezer heeft hier $\lambda \in \mathbb{R}$ gekozen. Als je dit niet gedaan hebt, pech gehad. Geen oplossing voor jou. Als we $\lambda \in \mathbb{R}$ nemen, dan onderscheiden we twee gevallen voor λ^2 :

$\lambda^2 = 0$: In dit geval vinden we $u(x) = Ax + B$ met $A, B \in \mathbb{R}$. Als we nu randvoorwaardes gaan invullen vinden we meteen dat $B = 0$. We vinden dus dat $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Axdx = 0$, dus is het evident dat ook $A = 0$. Oh neen, dit is een triviale oplossing, dus $\lambda \neq 0$.

$\lambda^2 > 0$: Dit geval kennen we, we vinden weer lekker $u(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$ met $A, B \in \mathbb{R}^3$. Randvoorwaarden geven chill $B = 0$. Dus zal $A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\lambda x) dx = 0$.

We vinden dus dat $\cos(\frac{\lambda\pi}{2}) = 1$, of $\lambda = 4z$ voor $z \in \mathbb{Z}_0$. Dus zal $\lambda^2 = 16n^2$ voor $n \in \mathbb{N}_0$.

De verantwoordigde student bemerkt nu dat als je $\lambda \in \mathbb{R}$ neemt dat dit wel meevalt. Ga ik salty zijn wanneer ik punten verlies op deze vraag door bullshit redenen? Wees maar zeker!

2.2 Vraag 2

a) Reken het snel even na.

b) Ja vul het in he.

$$\begin{aligned}w(0, t) &= 0 \\w(1, t) &= 0 \\w(x, 0) &= 3 \sin(4\pi x) + 5 \sin(9\pi x) - \frac{1}{4\pi^2 c^2} \sin(2\pi x)\end{aligned}$$

c) Dit is de diffusievergelijking, dus gebruik scheiding van veranderlijken in $T(t)$ en $\chi(x)$ om te vinden dat

$$\begin{aligned}T' &= -\lambda c^2 T \\ \chi'' &= -\lambda \chi\end{aligned}$$

³Jaja, ik ben zeer boos over mensen die dit in $\mathbb{C}$ genomen hebben, deze mensen mogen ophoepelen (we hebben de punten nog niet terug, dus wie weet ofdat dit allemaal gewoon in orde is :)

Het is momenteel veel te laat voor mij om nog met volle goesting de gevallen voor $\lambda < 0$ en $\lambda = 0$ op te schrijven, maar de randvoorwaardes geven voor deze dingen enkel de nuloplossing voor χ . We kunnen dus $\gamma^2 = \lambda$ nemen en vinden dat

$$\chi(x) = A \sin(\gamma x) + B \cos(\gamma x)$$

Randvoorwaardes geven dat $B = 0$ en dat $\sin(\gamma) = 0$, dus moet $\gamma = n\pi$ voor $n \in \mathbb{Z}$. De negatieve waardes kunnen we weggooien want $\sin$ is oneven om een algemene oplossing van de vorm

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) e^{-n^2 c^2 \pi^2 t}$$

Om te voldoen aan de beginvoorwaarde moet nu

$$3 \sin(4\pi x) + 5 \sin(9\pi x) - \frac{1}{4\pi^2 c^2} \sin(2\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x).$$

Als je het al zo ver geschopt hebt in de wiskunde (of fysica) zal je hopelijk wel meteen kunnen zien dat we nu als oplossing voor w dus zullen vinden

$$w(x, t) = 3 \sin(4\pi x) e^{-16c^2 \pi^2 t} + 5 \sin(9\pi x) e^{-81c^2 \pi^2 t} - \frac{1}{4\pi^2 c^2} \sin(2\pi x) e^{-4c^2 \pi^2 t}$$

d) Wow kijk, $u(x, t) = w(x, t) + \phi(x)$. Ok klaar.

Rommel op, ga een andere TTT maken⁴ en stop met mij lastig te vallen.

⁴En veel succes met die van jou, beste lezer!