Oplossing examen TAI 11 juni 2008

Veel plezier :)

Vraag 1

De pariteitstestmatrix van de (6,4) Hamming-code over GF(5) is de volgende:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de bijhorende generatormatrix

We weten dat $\tilde{H} = \begin{bmatrix} -P^T \mid I \end{bmatrix}$. $\tilde{H}$ kan door middel van kolomoperaties uit H worden afgeleid. Omwisselen van kolom 1 met kolom 5 en kolom 2 met kolom 6 geeft

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uit $\tilde{G} = [I \mid P]$ volgt dat

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tenslotte kan G bepaald worden door de transformatie $H \rightarrow \tilde{H}$ omgekeerd toe te passen op $\tilde{G}$. Dit geeft

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Codeer het informatiewoord: $\boldsymbol{i = 1\ 2\ 3\ 4}$

Het codewoord is niets anders dan $i \cdot G$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Decodeer het ontvangen woord: $v = 2\ 0\ 2\ 0\ 4\ 3$. Wat is het bijhorende informatiewoord?

Om het correcte codewoord te bepalen moeten we eerst het syndroom berekenen:

$$s = v \cdot H^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Aangezien het hier om een Hamming-code gaat, kan de code 1 fout verbeteren. Omdat s dan ook een veelvoud is van een rij in H^T, kan de waarde en plaats van de fout eenvoudig bepaald worden. Hier is $s = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$. Er is dus een fout van 4 op de vierde positie in v. Het correcte codewoord (en niet het informatiewoord, de opgave is hier niet duidelijk) is dan

$$c = v - e = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Vraag 2

Gegeven een (10,4) RS-code over GF(11) die 3 fouten kan verbeteren. l werd gelijk aan 2 gekozen. De primitieve 10e wortel uit 1 werd geconstrueerd op basis van de primitieve veelterm $5 + x$ over GF(11). De foutlocatorveelterm van een ontvangen woord is $\Lambda(x) = 2 + x^2$ en enkele syndromen zijn $S_1 = 6, S_4 = 2, S_6 = 7$. Bepaal de overige syndromen en bepaal met het PGZ-algoritme (pag. 64) de plaats en de waarde van de fouten.

Oplossing

Gegeven is: $t = 3, l = 2, n = 10, k = 4, q = 11$
De primitieve veelterm is $5 + x$, waaruit volgt dat $5 + \alpha = 0$ of $\alpha = 6$. Hiermee kunnen we de overige machten berekenen:

$$\begin{array}{ll} \alpha^0 = 1 & \alpha^5 = 10 \\ \alpha^1 = 6 & \alpha^6 = 5 \\ \alpha^2 = 3 & \alpha^7 = 8 \\ \alpha^3 = 2 & \alpha^8 = 4 \\ \alpha^4 = 9 & \alpha^9 = 2 \end{array}$$

Omdat $\Lambda(x)$ graad 2 heeft, is ook het aantal fouten ν gelijk aan 2.

De gevraagde syndromen kunnen we bepalen met behulp van de formule op pagina 62:

$$\sum_{m=0}^{\nu} \Lambda_m S_{j+m} = 0 \quad j = 1, ..., 2t - 2$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} 2S_1 + S_3 &= 0 \\ 2S_2 + S_4 &= 0 \\ 2S_3 + S_5 &= 0 \\ 2S_4 + S_6 &= 0 \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} S_2 &= 10 \\ S_3 &= 10 \\ S_5 &= 2 \end{aligned}$$

Nu kan de de foutveelterm worden berekend met PGZ. De foutlocaties worden gegeven door de nulpunten van $\Lambda(x)$ over GF(11).

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= 2 + x^2 \\ &= (x-3)(x-8) \\ &= (x-\alpha^2)(x-\alpha^7) \end{aligned}$$

Posities 3 en 8 bevatten dus een fout. De foutwaarden berekenen we door het stelsel in stap 4.3 van het PGZ-algoritme op te lossen.

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 8^2 & 6 \\ 3^3 & 8^3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

We vinden 5 en 3 als foutwaarden. De foutveelterm ziet er dus als volgt uit

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vraag 3

Beschouw een BCH-code van lengte 12 over GF(5) die 3 fouten kan verbeteren. l werd gelijk aan 0 gekozen.

(a) Bepaal de generatorveelterm van de code. U mag de veelterm laten staan als een product van factoren met *coëfficiënten in GF(5)*

We bepalen eerst een primitieve 12e wortel uit 1 over GF(5). Neem k zo klein mogelijk zodat geldt

$$q^k (mod\, n) = 1$$

Hieruit volgt dat $k = 2$. Bepaal nu l *($\neq l$ uit de opgave!)* zodat

$$q^k - 1 = n \cdot l$$

We besluiten dat $l = 2$ en dat bijgevolg $\beta = \alpha^2$ met α een primitief element van GF(25).

Vervolgens bepalen we de cyclotomische nevenklassen van β. Het berekenen van het volgende element van de nevenklasse gebeurt door het vorige element met 5 (mod 12) te vermenigvuldigen.

$$\begin{array}{lll lll} C_0 & = & \{0\} & C_4 = C_8 & = & \{4,8\} \\ C_1 = C_5 & = & \{1,5\} & C_6 & = & \{6\} \\ C_2 = C_{10} & = & \{2,10\} & C_7 = C_{11} & = & \{7,11\} \\ C_3 & = & \{3\} & C_9 & = & \{9\} \end{array}$$

Omdat de primitieve veelterm niet gegeven is, kunnen de minimaalveeltermen van de cyclotomische nevenklassen niet bepaald worden. Aangezien de opgave toelaat om de generatorveelterm als een product van factoren met coëfficiënten in GF(5) te schrijven, is dit ook niet nodig. Uit de eigenschappen van BCH-codes volgt, aangezien $t = 3$, dat 6 opeenvolgende machten van β nulpunten zijn van $g(x)$. Omdat $l = 0$ zijn dat de eerste 6 machten $(\beta^0, ..., \beta^5)$. De generatorveelterm wordt bijgevolg

$$g(x) = (x-1)(x-\beta)(x-\beta^5)(x-\beta^2)(x-\beta^{10})(x-\beta^3)(x-\beta^4)(x-\beta^8)$$

Opmerking Omdat de generatorveelterm normaal is opgebouwd uit een product van minimaalveeltermen, die van een volledige cyclotomische nevenklasse afhangen, moeten steeds alle β-machten uit een nevenklasse worden gebruikt. In de generatorveelterm hebben we bijvoorbeeld β^2 nodig, maar omdat β^{10} in dezelfde nevenklasse zit moet $(x-\beta^{10})$ ook worden gebruikt. Verder is het niet nodig om de termen horend bij een nevenklasse meer dan eens toe te voegen als er meerdere elementen uit die nevenklasse voor $g(x)$ nodig zijn. Hier zijn zowel β als β^5 nodig, maar is de term $(x-\beta)(x-\beta^5)$ slechts 1 maal gebruikt.

De opgave legt op dat de coëfficiënten van $g(x)$ in GF(5) dienen te liggen. Aangezien -1 $\notin$ GF(5), moet $g(x)$ geschreven worden als

$$g(x) = (x+4)(x+4\beta)(x+4\beta^5)(x+4\beta^2)(x+4\beta^{10})(x+4\beta^3)(x+4\beta^4)(x+4\beta^8)$$

(b) Wat is de dimensie van de code? Wat zou de dimensie geweest zijn als $l = 8$ werd gekozen? Is de keuze $l = 0$ een goede keuze? (Let op: voor het vervolg van de vraag is l steeds gelijk aan 0.)

De graad van $g(x)$ is gelijk aan 8. Bijgevolg is de dimensie van de code

$$k = n - graad(g(x)) = 12 - 8 = 4$$

Indien we voor $l = 8$ hadden gekozen, was $g(x)$ opgebouwd uit de termen horend bij de cyclotomische nevenklassen $C_4, C_9, C_2, C_7, C_0, C_1$. De generatorveelterm zou dan van graad 10 zijn en de code zou een dimensie van 2 hebben.

Keuze van l l dient zo gekozen te worden dat de graad van $g(x)$ zo klein mogelijk is. Op die manier krijgt de code een grotere dimensie. Dat wil zeggen dat er meer informatiewoorden mogelijk zijn, zonder dat er aan het foutverbeterend vermogen geraakt wordt. Bij deze code is $l = 8$ dus een slechte keuze. $l = 0$ is de beste keuze omdat zij de hoogste dimensie (4) als resultaat geeft. Let wel: het is best mogelijk dat er nog waarden van l zijn waarvoor de dimensie maximaal wordt.

(c) Vul de tabel met machten van α verder aan. α is een primitief element van GF(25) en nulpunt van $3 + 3x + x^2$ over GF(5).

Uit $3 + 3x + x^2$ volgt dat

$$\alpha^2 = 2 + 2\alpha$$

De volledige tabel is:

$\alpha^0 = [1\ 0]$	$\alpha^5 = [2\ 4]$	$\alpha^{10} = [1\ 3]$	$\alpha^{15} = [1\ 4]$	$\alpha^{20} = [4\ 4]$
$\alpha^1 = [0\ 1]$	$\alpha^6 = [3\ 0]$	$\alpha^{11} = [1\ 2]$	$\alpha^{16} = [3\ 4]$	$\alpha^{21} = [3\ 2]$
$\alpha^2 = [2\ 2]$	$\alpha^7 = [0\ 3]$	$\alpha^{12} = [4\ 0]$	$\alpha^{17} = [3\ 1]$	$\alpha^{22} = [4\ 2]$
$\alpha^3 = [4\ 1]$	$\alpha^8 = [1\ 1]$	$\alpha^{13} = [0\ 4]$	$\alpha^{18} = [2\ 0]$	$\alpha^{23} = [4\ 3]$
$\alpha^4 = [2\ 1]$	$\alpha^9 = [2\ 3]$	$\alpha^{14} = [3\ 3]$	$\alpha^{19} = [0\ 2]$	

(d) Van het ontvangen woord $v =$ 2 4 3 2 4 1 1 3 0 0 0 0 zijn enkele syndromen $S_3 = \alpha^{12}$, $S_5 = \alpha^{21}$, $S_6 = \alpha^{23}$. Bepaal de ontbrekende syndromen. Hint: Stelling 22 pag. 20 kan helpen; bekijk eens de cyclotomische nevenklassen die u in 1.(a) opgesteld hebt. Hint: $\alpha^6 = 3$.

S_1 is eenvoudig rechtstreeks te berekenen:

$$S_1 = v(\beta^{0+1-1}) = v(1) = 2+4+3+2+4+1+1+3 = 0$$

$S_2 = v(\beta)$, maar hier gebruiken we stelling 22: $(S_2)^q = v(\beta^q)$. Omdat $\forall a \in GF(q) : a^q = a$ (met q priem), wijzigt die formule enkel de machten van α en niet de coëfficiënten. Vermits $q = 5$, is $S_2^5 = v(\beta^5) = S_6$. Omdat $\alpha^{24} = \alpha^0$ is $(S_2)^{q \cdot q} = S_2 = (S_6)^q$. Tenslotte kunnen we S_2 dan berekenen:

$$S_2 = \alpha^{23^5} = \alpha^{115} = \alpha^{19}$$

Voor S_4 gebruiken we de tweede hint:

$$S_4 = v(\beta^3) = v(\alpha^6) = v(3) = 2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 3 + 4 + 1 = 2 = \alpha^{18}$$

(e) Voor het ontvangen woord waarvan de syndromen in 1.(d) gegeven en berekend werden is een gedeelte van de tabel voor het algoritme van Berlekamp-Massey gegeven. Vervolledig de tabel.

De opgeloste tabel is hier gegeven. De gegeven waarden zijn vetgedrukt.

s	Δ	n	d	$\Lambda(x)$	$\Lambda^*(x)$
0	/	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
2	α^{19}	0	2	x^2	α^5
3	α^{12}	**1**	2	$\boldsymbol{\alpha^5 x + x^2}$	α^5
4	$\boldsymbol{\alpha^1}$	2	**2**	$\alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2$	$\boldsymbol{\alpha^5}$
5	0	3	2	$\boldsymbol{\alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2}$	α^5
6	**0**	**4**	2	$\alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2$	α^5

Berekeningen

$$\Delta_1 = S_1 = 0 \longrightarrow \textbf{3.2.}\boldsymbol{a}$$

$$\Delta_2 = S_2 = \alpha^{19} \longrightarrow \textbf{3.2.}\boldsymbol{b},\ n > d \longrightarrow \boldsymbol{b}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= x^{1-0+1} \cdot 1 - \alpha^{19} \cdot 0 \\ &= x^2 \\ \Lambda_2^* &= \alpha^{-19} \cdot 1 \\ &= \alpha^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + 1 \cdot S_3 \\ &= \alpha^{12} \longrightarrow \textbf{3.2.}\boldsymbol{b},\ n < d \longrightarrow \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_3 &= x^2 - \alpha^{12} \cdot x \cdot \alpha^5 \\ &= x^2 - \alpha^{17} x \\ &= \alpha^5 x + x^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_4 &= 0 \cdot S_2 + \alpha^5 \cdot S_3 + 1 \cdot S_4 \\
&= \alpha^{17} + \alpha 18 \\
&= \alpha^1 \longrightarrow \mathbf{3.2.}\boldsymbol{b},\ n < d \longrightarrow \boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda_4 &= \alpha^5 x + x^2 - \alpha^1 \cdot x^0 \cdot \alpha^5 \\
&= \alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_5 &= \alpha^{18} \cdot S_3 + \alpha^5 \cdot S_4 + S_5 \\
&= \alpha^{18}\alpha^{12} + \alpha^5\alpha^{18} + \alpha^{21} \\
&= \alpha^6 + \alpha^{23} + \alpha^{21} \\
&= 3 + 4 + 3\alpha + 3 + 2\alpha \\
&= 0 \longrightarrow \mathbf{3.2.}\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

$$\Delta_6 = 0\ (geg.) \longrightarrow \mathbf{3.2.}\boldsymbol{a}$$

$$n + d \geq 2t \Longrightarrow \boldsymbol{STOP}$$

(f) Wat zijn de mogelijke $\boldsymbol{\phi^{(d)}(x)}$, $\boldsymbol{d = 0, 1, 2, 3}$? Wat is $\boldsymbol{\mu_d}$, $\boldsymbol{d = 0, 1, 2, 3}$? (Voor de definitie van $\boldsymbol{\phi^{(d)}(x)}$ en $\boldsymbol{\mu_d}$ zie pag. 67)

Uit de tekst op pagina 73 valt af te leiden dat wanneer $n \geq d$, $\Lambda = \phi^{(d)}$. μ_d is gelijk aan n in de laatste stap voordat d (de graad) verhoogd wordt. Met dit gegeven kunnen we een aantal termen rechtstreeks uit de tabel halen:

$$
\begin{aligned}
\phi^{(0)} &= 1 \\
\phi^{(2)} &= \alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2 \\
\mu_0 &= 1 \\
\mu_2 &= 4
\end{aligned}
$$

De ontbrekende termen, $\phi^{(1)}$ en μ_1, kunnen met behulp van stelling 44 pagina 69 en gevolg 8 op pagina 71 berekend worden. Uit het feit dat $H^{(1)}$ singulier is volgt:

$$
\begin{aligned}
\phi^{(1)} &= x \cdot \phi^{(0)} \\
&= x \\
\mu_1 &= \mu_0 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Omdat het algoritme is gestopt voordat graad 3 werd bereikt, zijn $\phi^{(3)}$ en μ_3 niet bepaald.

(g) Construeer de matrix $\boldsymbol{R^{(3)}}$ (definitie pag. 70, zie ook pag. 72). Haal de gegevens hiervoor uit de tabel van Berlekamp-Massey. Voor van nul verschillende elementen die u niet rechtstreeks uit de tabel kunt aflezen mag u 'X' invullen.

(in het academiejaar 2008-2009 was dit geen leerstof)

Definitie: $R^{(3)} = H^{(3)} \cdot F^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
R^{(3)} &= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ S_3 & S_4 & S_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \phi_0^{(1)} & \phi_0^{(2)} \\ 0 & 1 & \phi_1^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{19} & \alpha^{12} \\ \alpha^{19} & \alpha^{12} & \alpha^{18} \\ \alpha^{12} & \alpha^{18} & \alpha^{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha^{18} \\ 0 & 1 & \alpha^{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{19} & 0 \\ \alpha^{19} & \alpha^{12} & 0 \\ \alpha^{12} & \alpha^{18} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(h) Bepaal de plaats van alle fouten als u weet dat $\boldsymbol{\alpha^{22}}$ een nulpunt is van $\boldsymbol{\Lambda(x)}$.

Het eerste nulpunt van $\Lambda(x)$ is reeds gegeven, het tweede kan met een eenvoudige Euclidische deling worden berekend. We krijgen

$$\begin{aligned}
\Lambda(x) &= \alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2 \\
&= (x - \alpha^{22})(x - \alpha^{20})
\end{aligned}$$

Vermits $\alpha^{22} = \beta^{11}$ en $\alpha^{20} = \beta^{10}$, bevinden de fouten zich op posities 12 en 11.

(i) Bepaal met het algoritme van Forney de waarde van één van de fouten. U mag gebruik maken van de reeds gedeeltelijk berekende veelterm $\boldsymbol{\Omega(x) = ... + \alpha^6 x + ...}$

Dit is een zuivere toepassing van het algoritme en in feite enkel wat rekenwerk.

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{k=0}^{5} S_{6-k} x^k \\
&= S_6 + S_5 x + S_4 x^2 + S_3 x^3 + S_2 x^4 + S_1 x^5 \\
&= \alpha^{23} + \alpha^{21} x + \alpha^{18} x^2 + \alpha^{12} x^3 + \alpha^{19} x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega(x) &= R_{x^6}(S(x)\Lambda(x)) \\
&= (\alpha^{23} + \alpha^{21} x + \alpha^{18} x^2 + \alpha^{12} x^3 + \alpha^{19} x^4)(\alpha^{18} + \alpha^5 x + x^2) \; (mod\, x^6) \\
&= \alpha^{17} + (\alpha^{15} + \alpha^4)x + (\alpha^{12} + \alpha^2 + \alpha^{23})x^2 + (\alpha^6 + \alpha^{23} + \alpha^{21})x^3 \\
&\quad +(\alpha^{13} + \alpha^{17} + \alpha^{18})x^4 + (\alpha^0 + \alpha^{12})x^5 \\
&= \alpha^{17} + \alpha^6 x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + 0x^5 \\
&= \alpha^{17} + \alpha^6 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha^{20} \\
X_2 &= \alpha^{22} \\
&\downarrow \\
\Lambda'(X_1) &= \alpha^{20} - \alpha^{22}
\end{aligned}$$

Met alle voorbereidende berekeningen gedaan, kunnen we de waarde van een fout bepalen:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -\frac{\Omega(\alpha^{20})}{\alpha^{206}\Lambda'(\alpha^{20})} \\ &= -\frac{\alpha^{17}+\alpha^2}{\alpha^0(\alpha^{20}-\alpha^{22})} \\ &= \frac{\alpha^{19}}{\alpha^{19}} \\ &= 1 \\ &= \alpha^0 \end{aligned}$$

Op de 11e positie staat dus een fout van α^0 of 1.

Vraag 4

In de tekst over convolutionele cods wordt als voorbeeld meestal de convolutionele code met $k_0 = 1$, $n_0 = 2$ en $\nu = 2$ (zie notaties pag. 112) met generatorveelterm $g^{(1)} = X^2 + X + 1 = (7)$ en $g^{(2)} = X^2 + 1 = (5)$ gebruikt. We noteren dit als de code (7,5) met minimale afstand $d_{min} = 3$ en vrije afstand $d_\infty = 5$ (zie pag. 116). In de oefenzittingen hebben we een andere code met $k_0 = 1$, $n_0 = 2$ en $\nu = 2$ gebruikt: de code (7,3) met $d_{min} = 3$ en $d_\infty = 4$.

(a) Bepaal *alle* verschillende niet catastrofische codes (zie def. pag. 117-118) met $k_0 = 1$, $n_0 = 2$ en $\nu = 2$. (Codes zoals (7,5) en (5,7) waarbij we de twee uitvoerbits van plaats verwisselen noemen we niet verschillend!).

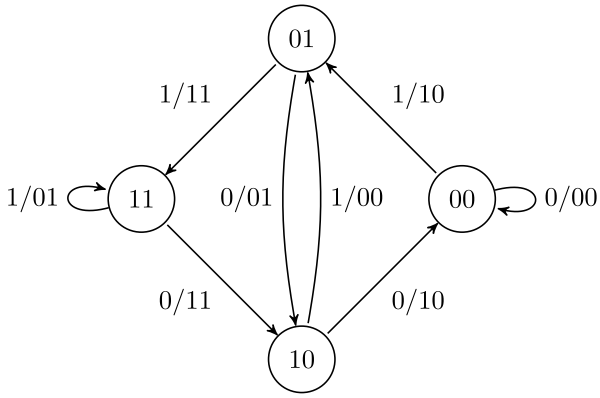
Omdat $n_0 = 2$ zijn er twee generatorfuncties. Aangezien $\nu = 2$ hebben beide een graad ≤ 2. Alle mogelijke generatorfuncties zijn dan:

$$\begin{array}{ccccccll} 0 & & & & & = & 0 & (0) \\ 1 & & & & & = & 1 & (1) \\ & & X & & & = & X & (2) \\ 1 & + & X & & & = & 1+X & (3) \\ & & & & X^2 & = & X \cdot X & (4) \\ 1 & + & & & X^2 & = & (1+X)(1+X) & (5) \\ & & X & + & X^2 & = & X(1+X) & (6) \\ 1 & + & X & + & X^2 & = & 1+X+X^2 & (7) \end{array}$$

Het getal tussen de haakjes wordt berekend door 2 in te vullen in de functie. Dit cijfer bepaalt enkel over welke functie het gaat, verder niets. Men spreekt van een niet-catastrofische code idien de generatorfuncties geen gemeenschappelijke delers hebben. De mogelijke codes zijn dus: (2,3); (2,5); (2,7); (3,4); (3,7); (4,5); (4,7); (5,7); (6,7).

(b) Bepaal voor *een* onder (a) gevonden code (niet de (7,5) code van het boek en niet de (7,3) code van de oefeningen!) d_{min} en d_∞. U kan eventueel gebruik maken van de bijgevoegde tabellen en/of trellis.

Deze oefeningen is nog redelijk eenvoudig en kan zelfs makkelijk zonder de tabellen of de trellis worden opgelost. De FSM voor de (2,5) code is gegeven in figuur 1. De definitie voor de minimale afstand stelt dat d_{min} gelijk is aan het minimum van de gewichten van alle paden met lengte 3, die vertrekken in 00. Voor onze (2,5) code is dat het pad 00-01-10-01. Bijgevolg is $d_{min} = 2$. De vrije afstand is het minimum van de gewichten van alle paden die vertrekken in 00 en er ook weer toekomen, zonder gebruik te maken van de lus op die toestand. Hier is 00-01-10-00 het pad met het laagste gewicht en is $d_\infty = 3$.



Figuur 1: FSM voor de (2,5) convolutionele code