Opgave 1

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + \ln\cos(t)\mathbf{k}$$

a) We weten dat

$$L = \int_0^{\pi/4} v(t)dt$$

met $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$. Daar nu

$$\mathbf{v}(t) = -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} - \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathbf{k}$$

weten we dat

$$v(t) = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + \left(-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2} = \sqrt{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{\cos(t)}.$$

Dus wordt L gegeven door

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec(t)dt = \ln|\sec(t)+\tan(t)||_0^{\pi/4} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right) - \ln(1-0) = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

b) Merk op dat het punt $(1,0,0)$ overeenkomt met $t=0$. We weten dan alvast dat

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = -\sin(t)\cos(t)\mathbf{i} + \cos^2(t)\mathbf{j} - \sin(t)\mathbf{k}$$

en dus is

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{j}.$$

Verder kunnen we eenvoudig controleren dat

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\mathbf{T}}{ds}$$

en dus is

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}.$$

We berekenen nu dat

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = (\sin^2(t) - \cos^2(t))\mathbf{i} - 2\cos(t)\sin(t)\mathbf{j} - \cos(t)\mathbf{k} = -\cos(2t)\mathbf{i} - \sin(2t)\mathbf{j} - \cos(t)\mathbf{k}$$

en dus is

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{1+\cos^2(t)}.$$

Bijgevolg vinden we dat

$$\mathbf{N}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

Tot slot weten we ook dat

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

en dus is

$$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

In het algemeen is deze eerste vraag redelijk goed opgelost. Zeker a) hebben de meesten volledig correct beantwoord. Sommigen hadden moeite met het uitrekenen van de integraal. Dit kon echter op meerdere manieren. Ten eerste hebben jullie een handboek! Hierin staan bijna alle "standaardintegralen" opgelost (op de achterflap). Ten tweede is deze ook met de hand oplosbaar:

$$\int \sec(t)dt = \int \sec^2(t)\cos(t)dt = \int \frac{1}{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int \frac{1}{1-u^2}du = \cdots$$

Dat had dus eigenlijk geen grote hindernis moeten vormen. Deze eerste deelvraag stond op 1,5 van de 3,5 punten. Bij de tweede deelvraag zijn er dan een paar die duidelijk nog moeite hebben hoe om te gaan, met deze vectorfuncties. Zo waren er die het volgende deden:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = -\sin(t)\cos(t)\mathbf{i} + \cos^2(t)\mathbf{j} - \sin(t)\mathbf{k}$$

en dus is

$$\mathbf{T}(1,0,0) = -\sin(1)\cos(1)\mathbf{i} + \cos^2(0)\mathbf{j} - \sin(0)\mathbf{k}.$$

Dit is dus absoluut niet correct! $\mathbf{T}$ *is een functie van de parameter* t *en dus moet je kijken welke waarde voor* t *je moet nemen opdat* $\mathbf{r}(t) = (1,0,0)$*. Verder waren er ook redelijk wat die probeerden om de kromme booglengtegeparametriseerd te maken en hiervoor berekenden dat*

$$s = \ln(\sec(t) + \tan(t))$$

en dit probeerden te herschrijven naar $t = \cdots$*. Dit is echter niet mogelijk (voor zover wij zagen) en was dus ook niet de bedoeling. Een andere optie was de formules uit 11.5 te gebruiken.*

Opgave 2

We gaan dit oplossen met behulp van Lagrange-multiplicatoren. Zij x de lengte, y de breedte en z de lengte van de doos. We zoeken het grootste volume, dus de te optimaliseren functie wordt gegeven door

$$f(x,y,z) = xyz.$$

Verder weten we dat de zijdelingse oppervlakte constant 64 moet zijn. Dit is dus de nevenvoorwaarde:

$$2xy + 2yz + 2xz = 64 \Rightarrow xy + yz + xz = 32.$$

We definiëren nu de functie

$$g(x,y,z) = xy + yz + xz.$$

Zij nu

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z) - 32) = xyz - \lambda(xy + yz + xz - 32).$$

We berekenen nu dat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= yz - \lambda(y+z) = 0 \Rightarrow yz = \lambda(y+z) \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= xz - \lambda(x+z) = 0 \Rightarrow xz = \lambda(x+z) \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= xy - \lambda(x+y) = 0 \Rightarrow xy = \lambda(x+y) \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= xy + yz + xz - 32 = 0 \Rightarrow xy + yz + xz = 32
\end{aligned}$$

Vermenigvuldigen we de eerste vergelijking met x, de tweede met y en de derde met z, dan krijgen we

$$\begin{aligned}
xyz &= \lambda x(y+z) \\
xyz &= \lambda y(x+z) \\
xyz &= \lambda z(x+y)
\end{aligned}$$

Hieruit halen we dan weer dat $\lambda xz = \lambda yz$. Bijgevolg moet of $\lambda = 0$ of $xz = yz$. De optie $\lambda = 0$ is niet mogelijk daar dan $yz = 0$ moet gelden en dus moet of y of z nul zijn. Dus $xz = yz$ en hieruit volgt er dan weer (daar $z \neq 0$) dat $x = y$. Analoog kunnen we nagaan dat $y = z$ en dus is $x = y = z$. Dit invullen in de vierde vergelijking, $xy + yz + xz = 32$, geeft ons dat

$$3x^2 32 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{32}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

In theorie moet er nog gecontroleerd worden of dit wel degelijk een maximum is (bijv. met de Hessiaan). In dit geval is dat echter intuïtief ook wel duidelijk.

Ook deze vraag werd redelijk goed opgelost door de meesten, al waren er hier toch iets meer moeilijkheden. De grootste moeilijkheid voor de meesten was het oplossen van het stelsel. Bij dit soort zaken is het zaak van goed in het oog te houden wat er nu eigenlijk staat en wat structuur te herkennen. Een tweede belangrijke zaak is om steeds goed op te letten of je wel mag wegdelen! Vaak zag je dat mensen iets hadden als (bijvoorbeeld)

$$xz(z-y) = 16(z-y)$$

en daaruit besloten dat $xz = 16$*. Maar dan vergeet je wel de mogelijkheid dat* $z - y = 0$ *(wat hier de juiste optie was)! Dit is iets waar sommigen nog iets meer aandacht aan moeten besteden.*

Sommigen hadden ervoor gekozen om uit de nevenvoorwaarde te halen dat, bijv.,

$$z = \frac{32 - xy}{x + y}$$

en dit in te vullen in $V(x,y,z) = xyz$ *om zo een optimalisatieprobleem van twee veranderlijken over te houden en dit op te lossen. Als dit goed werd uitgevoerd, was dat uiteraard ook een prima oplossing.*

Tot slot dan nog twee fouten die we vaak zagen terugkeren en echt wel vrij verbazend waren:

1. *Velen hadden niet de juiste nevenvoorwaarde opgesteld, maar iets als* $2xy + 2yz = 64$ *of* $4xy + 2xz = 64$ *of … Dit is verbazend omdat op het examen mondeling nog duidelijk is meegedeeld wat er nu precies bedoeld werd met "zijdelingse oppervlakte".*

2. *Een verrassend groot aantal zei dat* $z = \frac{V}{xy}$ *en vulden dit in in de nevenvoorwaarde om vervolgens deze te gaan optimaliseren (waarbij ze* V *als een constante behandelden). Dit is een vrij vreemde wending, daar er duidelijk gevraagd werd om het volume te maximaliseren, en de oppervlakte constant 64 te houden.*