

Toets Algemene natuurkunde 1

Lees zorgvuldig de vragen en aarzel niet om extra uitleg te vragen indien je iets onduidelijk vindt. Denk er ook aan om je antwoorden voldoende te motiveren, alleen de uitkomst van een berekening geven, is veel te weinig. Een voorbeeldje: indien je behoud van mechanische energie gebruikt bij een star lichaam dat zonder wrijving draait omheen een vaste horizontale as dan argumenteer je best dat de niet-conservatieve kracht die de as op het starre lichaam uitoefent geen arbeid verricht omdat het ophangpunt vast is.

Veel succes!

De toets is geïnspireerd op het YouTube-filmpje over behoud van impuls dat ter sprake kwam in de oefeningensessies en meer in het algemeen in het college.

1. Bereken het traagheidsmoment van een dun homogeen vierkant blokje van massa M en zijde L ten opzichte van een as doorheen het midden van het blokje en loodrecht op het vlak van het blokje. Het antwoord is $\frac{1}{6}ML^2$.
Aanwijzing: je kan de stelling van Steiner gebruiken in combinatie met het traagheidsmoment $\frac{1}{12}m\ell^2$ van een dun staafje van massa m en lengte ℓ ten opzichte van een as door het midden van het staafje en loodrecht er op.

Oplossing

1. Je verdeelt het blokje in smalle evenwijdige strookjes van lengte L en breedte Δx . Je nummert de strookjes aan de hand van een coördinaat x die varieert tussen $-L/2$ en $L/2$ met $|x|$ de afstand van het strookje tot het middelpunt van het blokje. Het traagheidsmoment ΔI van zulk een strookje is dan gegeven door de stelling van Steiner:

$$\Delta I \sim \Delta m x^2 + \frac{1}{12} \Delta m L^2 .$$

Hierbij is $\Delta m = \rho L \Delta x$ met ρ de oppervlakte-massadichtheid van het blokje. Deze verdeling in strookjes levert het benaderde traagheidsmoment

$$I \sim \sum \rho L \left(x^2 + \frac{1}{12} L^2 \right) \Delta x.$$

Je vindt het correcte resultaat in de limiet $\Delta x \rightarrow 0$:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} dx \rho L \left(x^2 + \frac{1}{12} L^2 \right) = \frac{1}{6} \rho L^4.$$

Nu gebruik je nog $\rho L^2 = M$ om te komen tot $I = \frac{1}{6} M L^2$.

De figuur toont het blokje in rust, net voor de inslag van een kogel van massa m met opwaartse gerichte snelheid $\vec{v}_0$. De kogel mist de verticale door het middelpunt P van het blokje met een afstand d en boort zich vast in het blokje. Net na de inslag, krijgt het massamiddelpunt van blokje + kogel een opwaartse gerichte snelheid $\vec{v}_1$ en draait met een hoeksnelheid ω rond de as loodrecht op het blokje. Je mag onderstellen dat $m \ll M$ en, om eenvoudigere uitdrukkingen te bekomen, alleen de belangrijkste termen in m/M weerhouden. Zo mag je $M/(M+m)$ met 1 benaderen en $m/(M+m)$ met m/M .

2. Welke behoudswetten kan je gebruiken tussen de ogenblikken net vóór en net ná de inslag? Argumenteer waarom wel of waarom niet.
3. Bereken $\vec{v}_1$ en ω .
4. Welke hoogte bereikt het middelpunt P van het blokje boven de vertrekhoogte? Verwaarloos hierbij luchtwrijving.
5. Hoeveel mechanische energie is er verloren gegaan bij de inslag van de kogel?

Oplossing

2. Je kan geen behoud van mechanische energie gebruiken omdat er niet-conservatieve krachten aan het werk zijn, namelijk de krachten die optreden

tijdens het inslaan van de kogel in het blokje. Ofschoon de zwaartekracht een uitwendige kracht is die op het systeem blokje + kogel inwerkt, mag je wel behoud van impuls en behoud van impulsmoment gebruiken. De stoot en momentstoot van die kracht is verwaarloosbaar klein omdat je een zeer kort tijdsinterval beschouwt.

3. Om $\vec{v}_1$ te bepalen, gebruiken we behoud van impuls:

$$m \vec{v}_0 = (M + m) \vec{v}_1$$

en dus

$$\vec{v}_1 = \frac{m}{M + m} \vec{v}_0 \approx \frac{m}{M} \vec{v}_0.$$

In de laatste stap hebben we de aanname $m \ll M$ gebruikt en alleen de belangrijkste bijdrage weerhouden.

Na de inslag zal, in de situatie van de figuur, het blokje in tegenuurwerkwijzerzin draaien omheen het massamiddelpunt van blokje + kogel. Omwille van de aangegeven benadering zal het massamiddelpunt nog nagenoeg samenvallen met P en zal het traagheidsmoment van blokje + kogel nog ongeveer gelijk zijn aan het traagheidsmoment van het blokje. We gebruiken nu behoud van impulsmoment ten opzichte van het punt P :

$$mv_0 d = I\omega \approx \frac{1}{6} ML^2 \omega.$$

en dus

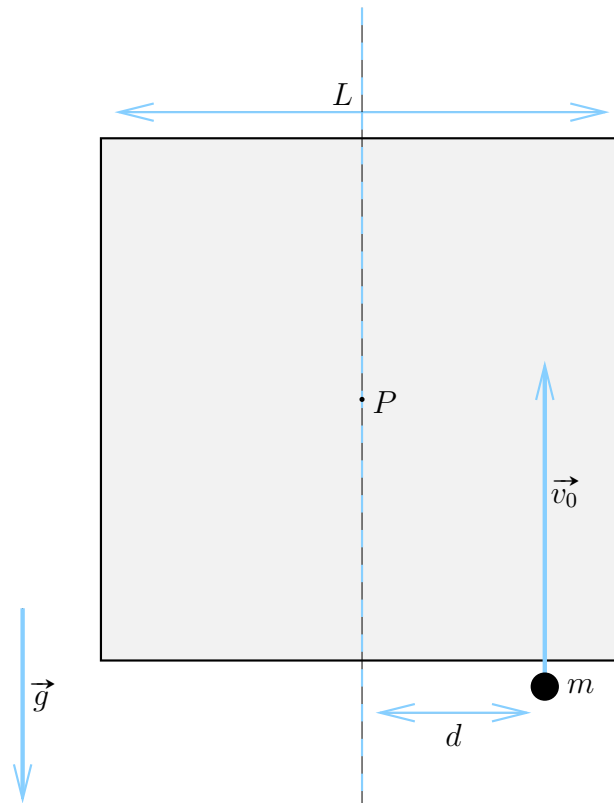
$$\omega = 6 \frac{m}{M} \frac{v_0 d}{L^2}.$$

4. De enige uitwendige kracht die na de inslag inwerkt op blokje + kogel is de zwaartekracht. Het massamiddelpunt voert daarom een eenparig vertraagde beweging uit met beginsnelheid $\vec{v}_1$. Stel dat we de oorsprong van een verticaal naar omhoog gerichte z -as kiezen in het midden van het blokje net voor de botsing, dan is de hoogte van het middelpunt van het blokje gegeven door

$$z(t) = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

We hebben hier $t = 0$ gesteld op het ogenblik van inslag. De maximale hoogte wordt bereikt op $t = v_1/g$ en bedraagt

$$\frac{v_1^2}{2g} \approx \frac{m^2 v_0^2}{2M^2 g}.$$



Figuur 1: Blokje en kogel net voor de inslag

5. Het verlies ΔE^{mech} aan mechanische energie wordt gegeven door het verschil van de totale kinetische energie vlak vóór en vlak ná de botsing. De kinetische energie vóór de botsing is $\frac{1}{2}mv_0^2$. Ná de botsing hebben we de kinetische energie $\frac{1}{2}(M+m)v_1^2$ van een fictief deeltje van massa $M+m$ in het massamiddelpunt van het systeem plus een rotationele kinetische energie $\frac{1}{2}I\omega^2$. Zo vinden we

$$\Delta E^{\text{mech}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{M^2}v_0^2 - \frac{1}{2}I\left(6\frac{m}{M}\frac{v_0d}{L^2}\right)^2 \approx \frac{1}{2}mv_0^2,$$

Dit zegt dat, in de gebruikte benadering, nagenoeg de volledige kinetische energie van de kogel verloren gaat (en in warmte omgezet wordt).