

TTT differentiaalvergelijkingen

18 december 2019

1 Vraag 1

Gegeven de volgende differentiaalvergelijking:

$$f''(x) + 2xf'(x) + (1 + x^2)f(x) = -\lambda f(x)$$

met randvoorwaarden $f'(0) = 0$ en $f'(1) = f(1)$.

1. Toon aan dat het hier gaat om een regulier Sturm-Liouville probleem.
2. Bereken de eigenwaarden met bijbehorende eigenfuncties. Tip: doe een substitutie om een tweede-orde differentiaalvergelijking te krijgen met constante coëfficiënten.
3. Druk $x^2 - 3$ uit als de som van eigenfuncties f_n . Noem de coëfficiënten bij deze reeks a_n . Toon aan dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 |a_n| = 0$$

Note: niet gegeven op de test, maar aangezien de substitutie door velen niet gevonden werd, geef ik hem hier: $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$.

2 Vraag 2

Gegeven een dunne staaf van 60cm met diffusieconstante k . De uiteinden van de staaf worden op temperatuur 0°C gehouden. Op tijdstip 0 heeft de staaf overal temperatuur 0°C behalve in het midden. Hier is de temperatuur 1200°C . De beginvoorwaarde wordt met andere woorden gegeven door:

$$f(x) = 1200\delta(x - 30)$$

Hierbij is δ de Dirac-delta functie. Je krijgt gegeven dat voor $a < b < c$ geldt dat

$$\int_a^c g(x)\delta(x - b)dx = g(b)$$

Stel dat $u(x, t)$ de functie is die het verloop van de temperatuur op de staaf beschrijft.

1. Toon aan dat het systeem aan volgende voorwaarden voldoet:

$$\begin{aligned}\frac{\delta u}{\delta t} - k \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} &= 0 \\ u(x = 0, t) &= u(x = L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}$$

Geef de functie $u(x, t)$ die aan deze voorwaarden voldoet.

2. Bereken de temperatuur voor een constante $k = 1.15\text{cm}^2/\text{s}$ in $x = 20\text{cm}$ na 3 minuten. Gebruik hiervoor de eerste twee niet-nul termen van de gevonden reeks.
3. Zij nu $k = 0.005\text{cm}^2/\text{s}$. Bereken hoelang het duurt alvorens de temperatuur $15\text{ }^\circ\text{C}$ bereikt in het punt $x = 20\text{cm}$.