Proefexamen Lineaire Algebra 2021 – 2022
Modeloplossing en toelichting

De drie vragen van het proefexamen hebben een gelijk gewicht. Ze werden niet op hetzelfde totaal verbeterd, maar achteraf zo herschaald dat elke vraag een gelijk gewicht heeft in de eindscore.

Wiskunde & Fysica: vraag 1

Vraag. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V. Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V, dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

Toelichting. Je kiest een willekeurige verzameling $\{y_1, \ldots, y_n\}$ met $n > m$ vectoren. Je moet bewijzen dat deze verzameling van vectoren lineair afhankelijk is.

Een goed antwoord bestaat uit de volgende elementen die op de kopijen zijn aangeduid. Deze vraag werd dus verbeterd op een totaal van 8 punten.

A (op 2 punten): Je schrijft elke vector y_i als een lineaire combinatie van de vectoren $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Je vermeldt hierbij expliciet dat je gebruikt dat $\{x_1, \ldots, x_m\}$ voortbrengend is.

B (op 1 punt): Je vermeldt expliciet dat je moet bewijzen dat er coëfficiënten λ_i bestaan, niet alle 0, zodanig dat $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = 0$.

C (op 2 punten): Je herschrijft de som $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ als een lineaire combinatie van de vectoren x_j, aan de hand van punt A hierboven.

D (op 2 punten): Je leidt hieruit een homogeen stelsel af met m vergelijkingen en n onbekenden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Je legt uit dat het *voldoende* is om aan te tonen dat dit stelsel een oplossing verschillend van de nuloplossing heeft.

E (op 1 punt): Je verwijst naar de theorie van stelsels om te besluiten dat een homogeen stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen altijd een oplossing verschillend van de nuloplossing heeft. Wie geen stelsel van lineaire vergelijkingen heeft bekomen, kan ook geen punten voor E meer verdienen.

Enkele studenten maken gebruik van de theorie van dimensie van een vectorruimte. Dat is hier niet toegelaten omdat het Lemma van Steinitz net het cruciale lemma is waaruit de theorie van dimensie afgeleid wordt. Dit wordt aangegeven met de letter **F** op de kopij. Hiervoor krijg je geen punten voor deze vraag.

Enkele studenten gaan ervan uit dat $\{x_1, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling is van $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Dan wordt het bewijs natuurlijk onterecht makkelijk. Dit is aangegeven met de letter **G** op de kopij. Hiervoor krijg je 1/8.

Wiskunde & Fysica: vraag 2

Vraag. Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices zijn en AB is inverteerbaar, dan zijn zowel A als B inverteerbaar.

(b) Een vierkante bovendriehoeksmatrix waarvan de diagonaalelementen verschillend van 0 zijn, is inverteerbaar.

Herinner dan we $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een bovendriehoeksmatrix noemen als $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$. De diagonaalelementen zijn a_{ii} met $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Als v_1, v_2, v_3 vectoren in een vectorruimte zijn en $v_1 \in \mathrm{vct}\{v_2, v_3\}$, dan is $v_2 \in \mathrm{vct}\{v_1, v_3\}$.

Toelichting. Elke deelvraag staat op 3 punten. Kleine fouten die hieronder niet staan zijn -0.5 en grotere fouten -1. Waar/fout zonder correcte redenering is 0 punten.

(a) Deze stelling is correct en er zijn meerdere oplossingsmethodes.

  (i) Voor de eerste staan er 2 punten om op te merken dat als AB inverteerbaar is dat dan $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$. Er staat 1 punt op hieruit afleiden dat A, B inveerteerbaar.

  (ii) Voor de tweede merk je op dat $B(AB)^{-1}$ een rechts inverse is van A, dit staat op 2 punten. Hieruit concluderen dat A inverteerbaar is en dat B analoog is, is op 1 punt. Het is belangrijk hier om het verschil te maken tussen rechts en links inverses.

(b) Deze stelling is correct en er zijn er ook 2 mogelijke methodes

  (i) Gebruik dat determinant van bovendriehoeksmatrix het product van de diagonaalwaarden is staat op 2 punten . Staat in boek, indien je dit probeert te bewijzen moet je gedetailleerd genoeg zijn. Hieruit afleiden dat determinant niet nul is en dus dat de matrix inverteerbaar is staat op 1 punt.

  (ii) Aantonen dat zo'n matrix kan rijgereduceerd worden naar een diagonaalmatrix of een identiteitsmatrix staat op 2 punten. Hieruit afleiden dat A inverteerbaar is, kan met determinanten, elementaire matrices, ... staat in het boek.

(c) Deze stelling is fout en de verwachte oplossing is een correct tegenvoorbeeld.

Wiskunde & Fysica: vraag 3

Vraag. Zij $V = \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ de vectorruimte van veeltermen met reële coëfficiënten en graad hoogstens n.

(a) Toon aan dan $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n + 1$.

(b) Veronderstel dat $P_0, \dots, P_n \in V$ willekeurige veeltermen zijn zodat P_i graad i heeft voor elke $i = 0, \dots, n$. Bewijs dat $\{P_0, \dots, P_n\}$ een basis van V is.

We gebruiken hier de conventie dat de veeltermen van graad 0 precies de constante veeltermen verschillend van de nulveelterm zijn.

Toelichting. Deze vraag staat op 5 punten, waarvan 1 voor deel (a) en 4 voor deel (b).

(a) De student krijgt 1 punt voor deel (a) als er expliciet vermeld is dat $\{1, X, \dots, X^n\}$ een basis is van V. Een redenering dat dit inderdaad een basis is, is niet noodzakelijk aangezien dit duidelijk is.

(b)
- Het expliciet vermelden van de uitspraak dat $\alpha = \{P_0, \dots, P_n\}$ een vrij deel is, levert 1 punt op.

- Een juiste toepassing van het lemma van Steinitz levert de student 1 punt op. Hierbij dient vermeld te worden dat α maximaal vrij is, en dus voortbrengend.
- Een correct bewijs van de uitspraak bij het eerste puntje (α is vrij) is 2 punten waard.

  Hierbij gaat men kijken naar een mogelijke lineaire relatie en concluderen dat deze nul is, om dit te doen moet men kijken naar de grootste niet-nul coëfficiënt indien die er is. Wanneer dit idee aanwezig is, krijgt de student reeds 1 punt. Bij een volledig en nauwkeurig bewijs is het andere punt te verdienen.

Informatica: vraag 1

Vraag. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale reële vectorruimte. Bewijs nauwkeurig en volledig dat elke vrije verzameling van vectoren in V uitgebreid kan worden tot een basis van V.

Toelichting. Zoals bij alle theorievragen bij Lineaire Algebra is het essentieel om deze eigenschap te bewijzen in de context waarin ze voorkomt. Zo zijn er bijvoorbeeld veel studenten die gebruik maken van eigenschappen zoals: een vrije verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$ met $n = \dim(V)$ moet voortbrengend (en dus een basis) zijn. Dat is in de opbouw van de theorie een **gevolg** van de opgave.

Het standaard antwoord op deze vraag bestaat uit een uitgewerkte versie van het argument in het boek, met de volgende elementen. De vraag werd verbeterd op een totaal van 6 punten.

Je start met een vrije verzameling $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Als deze verzameling voortbrengend is, dan is ze een basis en valt er niks te bewijzen.

A (op 2 punten): Als $\{v_1, \ldots, v_m\}$ niet voortbrengend is, bestaat er een vector $v_{m+1} \in V$ die niet behoort tot $\mathrm{vct}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Je voegt deze vector v_{m+1} toe en je vermeldt dat $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}\}$ nog altijd een vrij deel is.

B (op 2 punten): Je bewijst nauwkeurig dat $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}\}$ inderdaad vrij blijft.

C (op 1 punt): Je legt uit dat nu ofwel $\{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ voortbrengend is, zodat het bewijs rond is, ofwel niet. In dat laatste geval herhalen we het proces.

D (op 1 punt): Je legt uit dat het proces ooit stopt omdat, wegens het Lemma van Steinitz, een vrij deel ten hoogste evenveel elementen bevat als een basis. Nogal wat studenten verwijzen hier niet naar het Lemma van Steinitz, maar naar een argument met dimensies dat opnieuw eerder een gevolg van de opgave is.

Enkele studenten geven een volledig alternatief argument. Op die kopij staat de letter **E** en een globale beoordeling van dit argument.

Enkele studenten schrijven een argument waarbij ze weliswaar stap voor stap vectoren toevoegen tot ze een basis bekomen, maar met veel wiskundige onnauwkeurigheden of ontbrekende precieze argumenten. Op die kopij staat de letter **F** met een score van 2 of 3 op 6.

Informatica: vraag 2

Vraag. Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices zijn en $AB = I_n$, dan is $BA = I_n$.

(b) Als A en B vierkante $n \times n$ matrices en $\det(A + B) = \det(B)$, dan is $\det(A) = 0$.

(c) Als v_1, v_2, v_3, v_4 vectoren in een vectorruimte zijn met $v_1 \in \text{vct}\{v_2, v_3, v_4\}$ en $v_1 \notin \text{vct}\{v_3, v_4\}$, dan is $v_2 \in \text{vct}\{v_1, v_3, v_4\}$.

Toelichting. Elke deelvraag staat op 3 punten. Kleine fouten die hieronder niet staan zijn -0.5 en grotere fouten -1. Waar/fout zonder correcte redenering is 0 punten.

(a) Dit is waar en volgt onmiddellijk uit Stelling 1.39. Er moet een duidelijk onderscheid gemaakt worden tussen linkse en rechtse inverse, indien dit niet gebeurt is het resultaat 0 punten. Als er een duidelijk onderscheid gemaakt wordt, maar het niet duidelijk is dat het bestaan van een links/rechts inverse impliceert dat een rechts/links inverse bestaat dan wordt 1 punt gegeven.

(b) Deze stelling is onwaar. De verwachte oplossing is een correct tegenvoorbeeld.

(c) Er moet uit de twee aannames worden aangetoond dat $v_1 = av_2 + bv_3 + cv_4$ met $a \neq 0$, dit staat op 2 punten en de $a \neq 0$ is hier het belangrijkst. Hieruit kan afgeleid worden dat $v_2 = \frac{1}{a}v_1 - \frac{b}{a}v_3 - \frac{c}{a}v_4$, dit staat op 1 punt. Als er een niet helemaal volledige redenering wordt gegeven waarom $a = 0$ dan is het resultaat op het eerste deel 1 punt.

Informatica: vraag 3

Vraag. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en beschouw de vectoren $v_1 = (a, 1, 0)$, $v_2 = (a, 1+2a, ab)$ en $v_3 = (-a, 1, a)$ in $\mathbb{R}^3$. Definieer de vectorruimte $V = \text{vct}\{v_1, v_2, v_3\}$. Bepaal de dimensie van V in functie van de parameters a en b.

Toelichting. Deze vraag staat op 5 punten

- De matrix bepalen die als rijen de vectoren v_1, v_2, v_3 heeft en redeneren dat we de dimensie van de rijruimte zoeken: 1 punt (aangeduid met **A**).

  Alternatief kan de student ook dit punt behalen als men een correct homogeen stelsel opschrijft en aangeeft dat men op zoek is naar het aantal vrije variabelen.

- Juist elementaire rijoperaties toepassen zodat het gevraagde eenvoudig af te lezen valt (creëren van voldoende nullen): 1 punt (aangeduid met **B**).

- correcte conclusie: 3 punten (1 punt voor elk van de gevallen, aangeduid met **C**, **D**, **E** voor respectievelijk $a = 0$, $a \neq 0$ en $a = b$, $a \neq 0$ en $a \neq b$).

kleine reken of tekenfouten worden bestraft met -0.5 (aangeduid met **F**) een redeneerfout, zoals een deling door nul, wordt bestraft met -1 (aangeduid met **G**).