

Toevalsprocessen in de natuurkunde

Vraag 1

Beschouw een Markov proces X_t in continue tijd t waarvoor de overgangsintensiteiten $W(x, y)$ voor $x \rightarrow y$ worden geparametriseerd als

$$W(x, y) = \exp[a(x, y) + V(x)]$$

voor een zekere functie a en V . Hier zijn x, y willekeurig mogelijke toestanden.

Bewijs dat er detailed balance geldt als en slechts als $a(x, y) = a(y, x)$.

Wat is dan de stationaire verdeling?

Vraag 2

Beschouw een stochastische wandelaar op de gehele getallen $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ tussen 0 en N (met $N > 1$). De dynamica is Markoviaans en in discrete tijd: de overgangskansen zijn (om naar rechts te gaan) $p(n \rightarrow n+1) = \frac{N-n}{N}$ als $n < N$, en (om naar links te gaan) $p(n \rightarrow n-1) = n/N$ als $n > 0$. Alle andere overgangen zijn verboden.

Geef de expliciete vorm van de Master-vergelijking, dat wil zeggen hoe de kans om op plaats n te zitten verandert met de tijd bij een gegeven beginvoorwaarde.

Bepaal de stationaire verdeling.