

Topologie - Examen¹

Prof. Paul Igodt

29 januari 2007 / Voormiddag / 3Ba Wisk

Opmerking vooraf: dit is een open-boek examen. Je kunt derhalve gebruik maken van a) je cursus-nota's, b) je nota's van de oefenzittingen, c) het handboek van J. Munkres d) de taken die in de loop van het jaar gemaakt werden.

In het algemeen geldt dat je bij een redenering de resultaten gezien in de hoorcolleges mag gebruiken, evenals de resultaten uit het handboek (met een minimale uitleg en/of een referentie, tenzij dit precies het voorwerp van de vraag uitmaakt) evenals resultaten uit een eerder voorkomend onderdeel van het examen.

Alle andere onderdelen van argumentaties en redeneringen moeten expliciet aangetoond worden.

1. (Mondeling) Veronderstel dat (X, τ) een topologische ruimte is. Een deelruimte Y van X noemen we een **retract** van X als en slechts als er een continue afbeelding $r : X \rightarrow Y$ bestaat, zodat $\forall y \in Y : r(y) = y$. Deze continue afbeelding noemt men de *retractie*.
 - (a) Neem $(\mathbb{R}^2, \tau)$ (standaard topologie). Kan een paar $Y = \{a, b\} \subset \mathbb{R}^2$ een retract zijn van $\mathbb{R}^2$?
 - (b) Toon aan dat, als (X, τ) Hausdorff is en Y een retract is van X , dan Y gesloten is in X .
 - (c) Noteer S^1 voor de eenheidscirkel in het vlak. Toon aan dat S^1 een retract is van $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
 - (d) Beschouw $(\mathbb{R}^2, \tau_{sf})$ het zogenaamde Sorgenfrey-vlak (deze topologie op $\mathbb{R}^2$ is de product-topologie van de "lower limit topology" τ_ℓ op $\mathbb{R}$ met zichzelf).
 - i. Is deze ruimte Hausdorff?
 - ii. Is deze ruimte samenhangend?
 - iii. Zij $L = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ de "2-de bissectrice" als deelruimte van het Sorgenfrey-vlak. Is L een retract van het Sorgenfrey-vlak?
 - (e) We zeggen dat een topologische ruimte (X, τ) de vastepuntseigenschap heeft als en slechts als elke continue afbeelding $f : X \rightarrow X$ een vast punt heeft (m.a.w. een punt $x \in X$, waarvoor $f(x) = x$). Toon aan dat, als Y een retract is van (X, τ) en X de vastepuntseigenschap heeft, Y dan ook de vastepuntseigenschap heeft.

2. (Schriftelijk) *Stelling (van Tychonoff): Als (X, τ_X) en (Y, τ_Y) compacte ruimten zijn, dan is de productruimte $(X \times Y, \tau_{prod})$ ook compact.*

Werk voor deze stelling een bewijs uit dat de volgende onderdelen bevat:

Start: zij $\mathcal{A}$ een familie opens van $X \times Y$ waarvoor geen enkele eindige deelfamilie $X \times Y$ overdekt;

Bewering-1: dan bestaat een punt $x_0 \in X$ waarvoor geen enkele open buisvormige omgeving $U_{x_0} \times Y$ eindig overdekt is door $\mathcal{A}$;

Bewering-2: dan bestaat een punt $y_0 \in Y$ waarvoor geen enkele open rechthoek $U \times V$ die (x_0, y_0) bevat, eindig overdekt wordt door $\mathcal{A}$;

Bijgevolg/Conclusie: is $\mathcal{A}$ geen open overdekking van $X \times Y$ en is de stelling aangetoond.

¹©Geen enkel deel van dit examen mag openbaar gemaakt worden zonder voorafgaandelijke schriftelijke toelating van de auteur.

-
3. (Schriftelijk) Neem een verzameling $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ van paarsgewijs disjuncte, aftelbare, dichte deelverzamelingen van het open interval $]0, 1[$. Zij X de verzameling gegeven door

$$X = \{(x, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}, x \in A_\alpha\}.$$

Dan is $X \subset]0, 1[\times \mathbb{R}$. Definieer voor elke $a, b, \beta \in \mathbb{R}$ volgende deelverzameling van X :

$$\mathcal{O}(a, b, \beta) = \{(x, \alpha) \in X \mid a < x < b, \alpha \leq \beta\}.$$

M.a.w. $\mathcal{O}(a, b, \beta) = (]a, b[\times]-\infty, \beta]) \cap X$.

- Argumenteer kort waarom zulke verzameling $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ bestaat. (*Hint: denk aan de quotiëntgroep $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}, +)$.*)
- Toon aan dat de verzameling $\{\mathcal{O}(a, b, \beta) \mid a, b, \beta \in \mathbb{R}\}$ een basis is voor een topologie op X .
- Toon aan dat de topologie τ op X die bepaald wordt door deze basis, niet de deelruimtetopologie van $]0, 1[\times \mathbb{R}$ is.
- Toon aan dat (X, τ) Hausdorff is.
- Beschouw de verzameling

$$A = ([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \mathbb{R}_0^+) \cap X.$$

Toon aan dat deze verzameling gesloten is in (X, τ) . Kun je een punt $b \in X$ vinden, zo dat A en b niet te scheiden zijn door disjuncte opens?

4. (Schriftelijk) Zij (X, τ) een topologische ruimte. We definiëren de volgende begrippen:
- X noemt hypersamenhangend als elk niet leeg open deel van X dicht is in X ;
 - X noemt ultrasamenhangend als elk tweetal niet lege geslotens in X een niet lege doorsnede heeft;
 - X noemt go-samenhangend als voor elk tweetal niet lege opens U en V in X geldt: $\bar{U} \cap \bar{V} \neq \emptyset$.
- Bepaal alle Hausdorff ruimten die hypersamenhangend zijn.
 - Toon de volgende implicaties aan:
 - go-samenhangend $\Rightarrow$ samenhangend
 - hypersamenhangend $\Rightarrow$ go-samenhangend
 - ultrasamenhangend $\Rightarrow$ go-samenhangend
 - Toon aan de hand van voorbeeldjes aan dat deze 3 begrippen en het gewone begrip samenhangend allemaal verschillende begrippen zijn.
-