Voorbehouden voor de correctoren					
Vraag 1	Vraag 2	Vraag 3	Vraag 4	Vraag 5	Totaal

Toets Kansrekenen I

28 maart 2014

Naam :

Richting :

Lees volgende aanwijzingen alvorens aan het examen te beginnen

- Wie de vragen aanneemt en bekijkt, moet minstens 1 uur blijven zitten.
- Schrijf op 1ste blad duidelijk je volledige naam en richting (en op elk blad je naam).
- Je mag gebruik maken van niet-grafisch rekenmachine, formularium en statistische tabellen. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan! Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het moment dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel. Bijvoorbeeld: het uitrekenen van een kans onder een normale verdeling moet herleid worden tot een kans onder een standaardnormale verdeling, een binomiale kans moet herleid worden tot een kans onder een normale verdeling (indien CLS van toepassing is). Wanneer het nodige aantal vrijheidsgraden niet in de tabel staat, mag je gaan kijken bij het dichtstbijzijnde aantal dat wel in de tabel staat. Werk met 4 cijfers na de komma!
- Alle communicatie-apparatuur is strikt verboden.
- Gebruik de voorziene ruimte om te antwoorden op de vragen (voor- en achterkant).
- Bij het indienen van je examen, geef je ook kladpapier af (maar daar wordt geen rekening mee gehouden tijdens verbetering).
- Let op
  - correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig/niets waard!
  - fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard.
  - fout numeriek antwoord (bvb ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.

  Toon dus DUIDELIJK aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt (telegramstijl is toegelaten). Gebruik zoveel mogelijk de wiskundige notatie zoals die in de leerstof is aangebracht. Verklaar nieuwe symbolen.
- Je hebt **2 uur** tijd om het examen op te lossen.

VEEL SUCCES !

Vraag 1 :
Een stochastisch koppel (X, Y) heeft een bivariate normale verdeling als de gezamenlijke verdelingsfunctie van X en Y gegeven wordt door

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}\times\right. \\ &\left.\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right) \end{aligned}$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, waarbij $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_0^+$ en $\rho \in [0, 1]$.
Bereken de marginale dichtheidsfunctie van Y.
(Toon tussenstappen, niet enkel eindresultaat.)

Oplossing: Noteer

$$C = \{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\}^{-1} \qquad A = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2}$$
$$u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}.$$

Voer daarnaast een nieuwe integratieveranderlijke $v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ in. Dan bekomen we, voor alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= C\sigma_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A(u^2-2\rho uv+v^2)}du \\ &= C\sigma_1 e^{-Av^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-Au^2+2A\rho uv)}du \\ &= C\sigma_1 e^{-A(1-\rho^2)v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A(u-\rho v)^2}du \\ &= C\sigma_1 e^{-A(1-\rho^2)v^2} \frac{1}{\sqrt{2A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\ &= C\sigma_1 e^{-\frac{1}{2}v^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2A}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \end{aligned}$$

waarbij we ook de integratieveranderlijke nog eens veranderd hebben van u naar $z = \sqrt{2A}(u - \rho v)$. We zien hieruit dus dat Y normaal verdeeld is met gemiddelde μ_2 en variantie σ_2^2.

Vraag 2 :
Zij Ω een niet-aftelbare verzameling en stel $\mathcal{A} = \{A \in \Omega \,|\, A \text{ is aftelbaar of } A^C \text{ is aftelbaar}\}$. Bewijs dat $\mathcal{A}$ een σ-algebra is.

Oplossing: Omdat $\emptyset$ aftelbaar is, is $\Omega = \emptyset^C$ een element van $\mathcal{A}$. Stel nu dat $A \in \mathcal{A}$. Dan volgt meteen uit de definitie van $\mathcal{A}$ dat ook $A^C \in \mathcal{A}$. Veronderstel nu dat $A_n \in \mathcal{A}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dan kunnen we twee gevallen onderscheiden: ofwel is elke A_n aftelbaar, ofwel is er een $m \in \mathbb{N}$ zodat A_m^C aftelbaar is. Als alle A_n aftelbaar zijn, zal $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aftelbaar zijn want we nemen de aftelbare unie van aftelbare verzamelingen. In het tweede geval bekijken we $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^C = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C$. Omdat A_m^C aftelbaar is, zal ook $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C$ aftelbaar zijn want $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^C \subseteq A_m^C$. We hebben dus in beide gevallen aangetoond dat $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ of zijn complement aftelbaar zijn en daarom zal $\cup_{n\in N(\mu,\sigma^2)} A_n \in \mathcal{A}$. Dit bewijst dat $\mathcal{A}$ een σ-algebra is.

Vraag 3 :

Yumm's is een restaurant dat ook aan huis levert. Op hun website kan je terugvinden dat de gemiddelde wachttijd (tussen het moment waarop je bestelt en het moment waarop het eten geleverd wordt) 60 minuten bedraagt, met als standaarddeviatie 20 minuten. Ook restaurant *Tasty* levert aan huis, gemiddeld gezien met een wachttijd van 75 minuten met een standaarddeviatie van 10 minuten. Wanneer je eten bestelt, doe je dat 6 van de 10 keer bij *Yumm's*, en 4 van de 10 keer bij *Tasty*. Indien je veronderstelt dat beide wachttijden normaal verdeeld zijn, geef dan antwoord op onderstaande vragen.

1. Indien je een bestelling geplaatst hebt om 19 uur, en je eten wordt geleverd tussen 20.15 uur en 20.30 uur, hoe groot is dan de kans dat je bij *Yumm's* besteld hebt?

Oplossing: Zij A de gebeurtenis dat je bestelling tussen 20.15 en 20.30 geleverd wordt als je om 19 uur bestelde, en B de gebeurtenis dat je bij *Yumm's* bestelde.

- Zij X de wachttijd als je bij *Yumm's* besteld hebt. Dan is $X \sim N(60, 20^2)$ en

$$\begin{aligned} P(A|B) = P(75 < X < 90) &= P\left(\frac{75-60}{20} < Z < \frac{90-60}{20}\right) \\ &= P(Z < 1.5) - P(Z < 0.75) \\ &= 0.933 - 0.773 \\ &= 0.16 \end{aligned}$$

- Zij Y de wachttijd als je bij *Tasty* besteld hebt. Dan is $Y \sim N(75, 10^2)$ en

$$\begin{aligned} P(A|B^c) = P(75 < Y < 90) &= P\left(\frac{75-75}{10} < Z < \frac{90-75}{10}\right) \\ &= P(Z < 1.5) - P(Z < 0) \\ &= 0.933 - 0.5 \\ &= 0.433 \end{aligned}$$

- De gevraagde kans wordt:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} \\ &= \frac{0.16 \times 0.6}{0.16 \times 0.6 + 0.433 \times 0.4} \\ &= 0.36 \end{aligned}$$

2. Indien je elke week bij *Yumm's* bestelt, hoe groot is dan de kans dat je eten gedurende één jaar (52 weken) minstens 10 keer tussen 20.15 uur en 20.30 uur geleverd werd?

Oplossing: Zij A het aantal keer dat het eten tussen 20.15 en 20.30 geleverd wordt, dan is $A \sim B(52, 0.16)$. Wegens de CLT kunnen we stellen dat $A \approx N(52 \times 0.16, 52 \times$

0.16×0.84 of dus $A \approx N(8.32, 6.99)$

$$\begin{aligned} P(A \geqslant 10) &= P\left(Z \geqslant \frac{10 - 0.5 - 8.32}{\sqrt{6.99}}\right) \\ &= P(Z \geqslant 0.45) \\ &= 1 - 0.674 = 0.326 \end{aligned}$$

Vraag 4 :

Beschouw een toevalsvariabele X met de volgende cumulatieve verdelingsfunctie

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta} \qquad x \geq 0$$

met parameters $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. Deze verdelingsfunctie beschrijft de Weibull verdeling.

1. Bepaal de dichtheidsfunctie van X.

Oplossing:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{(-(x/\alpha)^\beta)}$$

2. Stel $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta$, wat kan je vertellen over de verdeling van Y?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
g &: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \to y = g(x) = (x/\alpha)^\beta \\
h = g^{-1} &: y \to x = h(y) = \alpha\, y^{1/\beta} \\
f_Y(y) &= f_X(h(y))\, |h'(y)| = \frac{\beta}{\alpha} y^{(\beta-1)/\beta} e^{-y} \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} \qquad (y \geq 0) \\
&= e^{-y} \Leftrightarrow Y \sim \mathcal{E}(1)
\end{aligned}$$

Alternatieve oplossing

$$\begin{aligned}
P(Y > y) &= P(\frac{X}{\alpha}^\beta > y) = P(X > \alpha y^{1/\beta}) \\
&= 1 - F_X(\alpha y^{1/\beta}) = e^{-y}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ voor $y \geq 0$, dus $Y \sim \mathcal{E}(1)$

3. Hoe kunnen we stochastische veranderlijken komende van de Weibull verdeling genereren, vertrekkende van $U \sim U[0,1]$?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= 1 - \exp(-(x/\alpha)^\beta) \\
z &= 1 - \exp(-(x/\alpha)^\beta) \\
x &= a\,(-\log(1-z))^{1/\beta} \\
F_X^{-1}(z) &= \alpha\,(-\log(1-z))^{1/\beta}
\end{aligned}$$

Gegeven $u \sim U(0,1)$, dan is $F_X^{-1}(u) = \alpha\,(-\log(1-u))^{1/\beta}$ Weibull verdeeld met parameters $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. Dit is equivalent met $\alpha\,(-\log(u))^{1/\beta}$ is Weibull verdeeld met parameters $\alpha > 0$ en $\beta > 0$.

Vraag 5 :

Stel s.v. X_1 is exponentieel verdeeld met dichtheid

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}} \qquad \text{voor } x \geq 0$$

en s.v. X_2 is χ^2 verdeeld met dichtheid

$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{2^2\Gamma(2)}e^{-\frac{x}{2}}x^{2-1} \text{ voor } x \geq 0.$$

Wat is de verdeling van $X_1 + 3X_2$ indien X_1 en X_2 onafhankelijk zijn?

Oplossing:

$$\begin{aligned}
X_1 \sim \exp(6) \Rightarrow M_{X_1}(t) &= (1-6t)^{-1} \\
X_2 \sim \chi^2(4) \Rightarrow M_{X_2}(t) &= (1-2t)^{-2} \\
X_1, X_2 \text{ onafhankelijk } \Rightarrow M_{X_1+3X_2} &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(3t) \\
&= (1-6t)^{-1}(1-6t)^{-2} = (1-6t)^{-3} \\
&\Rightarrow X_1 + 3X_2 \sim \Gamma(3,6)
\end{aligned}$$