Tussentijdse Toets Wiskunde 2
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie,
Chemie, Geografie, Geologie en Informatica
april 2011

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst.

- Er zijn drie vragen. De eerste twee gaan over lineaire algebra en de laatste over reeksen. De derde vraag is niet bestemd voor geografie studenten.

- U maakt deze toets thuis op een moment dat het u past. Om deze toets een zinvolle voorbereiding te laten zijn op het examen, dient u zo veel mogelijk de omstandigheden van het echte examen te volgen. Dit wil zeggen:

  - Reserveer een periode van 3 uur om omgestoord aan de vragen te werken.
  - U mag gebruik maken van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, symbolisch is niet toegestaan) en de cursustekst (Wiskunde I en Wiskunde II). U mag **niet** gebruik maken van eigen aantekeningen of uitgewerkte oefeningen.
  - Werk de antwoorden eerst op klad uit. Schrijf de uiteindelijke antwoorden duidelijk leesbaar op. Begin het antwoord onder het blad met de desbetreffende vraag en vul eventueel aan met extra bladen. Vermeld uw naam op elk blad.

- Lever de toets in op de oefenzitting van week 17 of 18 (26 april–6 mei 2011).

- Succes!

Vraag 1 (a) Bereken $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ waarin

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix}$$

met $\gamma \in \mathbb{R}$.

(b) Voor welke γ liggen de drie vectoren in een vlak door de oorsprong?

(c) Los het stelsel

$$A^T \vec{x} = \vec{b}$$

op waarin $A = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix}$ de matrix is met $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ als kolomvectoren.

Antwoord

(a) Er geldt

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \gamma \\ 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 2 + (-1 - \gamma) - 2 = -1 - \gamma.$$

(b) De drie vectoren liggen op een vlak door de oorsprong, als en slechts als ze lineair afhankelijk zijn en dit is het geval als en slechts als

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix} = 0.$$

De determinant kun je uitrekenen. Het resultaat is $-1 - \gamma$ en er volgt dat de drie vectoren op een vlak door de oorsprong liggen als en slechts als $\gamma = -1$. Voor $\gamma = -1$ geldt inderdaad

$$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}.$$

Opmerking: Als u denkt aan formule (5.5.5) uit de cursus:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{bmatrix},$$

dan kunt u ook meteen gebruik maken van onderdeel (a) om de determinant te vinden.

(c) Het stelsel is (let op de getransponeerde!)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & \gamma & | & -1 \end{bmatrix}$$

Met elementaire rijoperaties herleiden we dit stelsel tot

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & \gamma & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 1 & \gamma & | & -1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & \gamma+1 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & \gamma+1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Er is geen oplossing als $\gamma = -1$. Als $\gamma \neq -1$ dan vinden we met achterwaartse substitutie dat $\vec{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ met

$$z = \frac{-2}{\gamma+1}, \quad y = 1, \quad x = \frac{-2}{\gamma+1}.$$

Vraag 2 (a) Laat zien dat

$$\begin{vmatrix} a^2+t & ab & ac \\ ab & b^2+t & bc \\ ac & bc & c^2+t \end{vmatrix} = t^2(t+a^2+b^2+c^2).$$

(b) Gebruik (a) om de eigenwaarden van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

te berekenen.

(c) Bepaal een inverteerbare matrix X zodanig dat $X^{-1}AX$ een diagonaalmatrix is.

Antwoord

(a) Met de regel van Sarrus volgt

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a^2+t & ab & ac \\ ab & b^2+t & bc \\ ac & bc & c^2+t \end{vmatrix} \\ &\qquad = (a^2+t)(b^2+t)(c^2+t) + (ab)(bc)(ac) + (ac)(ab)(bc) \\ &\qquad\qquad - (a^2+t)(bc)^2 - (b^2+t)(ac)^2 - (c^2+t)(ab)^2. \end{aligned}$$

Als we dit uitwerken en ordenen naar machten van t, dan zien we dat de term met t en de constante term (zonder t) wegvallen. We houden over

$$t^3 + (a^2+b^2+c^2)t^2 = t^2(t+a^2+b^2+c^2).$$

(b) De karakteristieke veelterm van A is

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix}.$$

Dit is de determinant uit (a) voor de waarden $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ en $t = -\lambda$. Volgens onderdeel (a) geldt dus

$$p(\lambda) = \lambda^2(-\lambda + a^2 + b^2 + c^2) = \lambda^2(-\lambda + 14).$$

De nulpunten hiervan zijn $\lambda = 0$ (2 keer) en $\lambda = 14$. Dit zijn de eigenwaarden van A.

(c) We moeten voor X de matrix met als kolommen de eigenvectoren van A nemen.

Bij eigenwaarde $\lambda = 0$ vinden we twee lineair onafhankelijke eigenvectoren (bv.)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bij eigenwaarde $\lambda = 14$ vinden we een eigenvector

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Als matrix X kunnen we nemen

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dan geldt inderdaad

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}.$$

Opmerking: Omdat A een symmetrische matrix is, bestaat er ook een orthogonale matrix X met $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$. Het is een goede oefening deze X te berekenen.

Vraag 3 (a) Geef de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \ln(2 + x^2).$$

(b) Bereken de convergentiestraal van de volgende machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} x^k$$

(c) Bereken de eerste vier termen in de ontwikkeling naar Legendre veeltermen van de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{voor } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Schets de grafiek van f samen met de grafiek van $c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3$.

Antwoord

(a) We weten (zie formule (2.4.10) uit de cursus Wiskunde II, deel 2) dat

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Vervang hierin x door $\frac{x^2}{2}$. Dan volgt

$$\ln\left(1 + \tfrac{x^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k 2^k} x^{2k}$$

Omdat

$$f(x) = \ln\left(2(1 + \tfrac{x^2}{2})\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \tfrac{x^2}{2}\right)$$

volgt nu dat

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k 2^k} x^{2k}.$$

Dit is de Maclaurinreeks. Ze is convergent als $|\frac{x^2}{2}| < 1$. Dat wil zeggen als $|x| < \sqrt{2}$.

(b) We gebruiken de verhoudingstest met $c_k = \binom{3k}{k} = \frac{(3k)!}{k!(2k)!}$. Er geldt

$$\frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{(3k)!}{k!(2k)!} \frac{(k+1)!(2(k+1))!}{(3(k+1))!} = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+2)}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}.$$

De limiet hiervan voor $k \to \infty$ is

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4}{27}.$$

Dit is de convergentiestraal van de machtreeks.

(c) We kennen de formule

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} P_k(x) f(x)\, dx.$$

Voor de gegeven functie f wordt dit

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{0}^{1} P_k(x)\, dx.$$

Dus

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 1\, dx = \frac{1}{2}, \\
c_1 &= \frac{3}{2} \int_0^1 x\, dx = \frac{3}{4}, \\
c_2 &= \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\, dx = 0, \\
c_3 &= \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\, dx = -\frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

De gevraagde ontwikkeling naar Legendre veeltermen is bijgevolg

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{7}{32}(5x^3 - 3x).$$

Maak zelf de plot hiervan met Matlab.

Opmerking: Er geldt dat $c_k = 0$ als k een even getal is met $k \geq 2$. Waarom?