

Uitwerking van het examen Calculus II op 25.03.2013

Opgave 1: Een labo produceert twee soorten ijscrème, Dolce en Amaro. Als in één week, x kg van het type Dolce en y kg van het type Amaro geproduceerd worden, is de totale kost

$$K(x, y) = 2500 + 200x + 200y - 2x^2y.$$

In de winter wordt minder ijscrème geconsumeerd. Minimaliseer de wekelijkse kost voor een totale productie (dus van beide ijscrèmes samen) gelijk aan 30 kg.

Oplossing: Er bestaan twee mogelijkheden om deze opgave op te lossen.

Methode 1, invullen en in een veranderlijke minimaliseren: Uit $x + y = 30$ volgt $y = 30 - x$. Als we dit in de functievoorschrift van K invullen, zien we dat we de functie

$$\tilde{K}(x) = 2500 + 200x + 200(30 - x) - 2x^2(30 - x) = 8500 - 60x^2 + 2x^3$$

moeten minimaliseren voor $0 \leq x \leq 30$. Het geldt

$$\tilde{K}'(x) = -120x + 6x^2 = 6x(x - 20).$$

We hebben $\tilde{K}'(x) = 0$ als en slechts als $x = 0$ of $x = 20$. Aangezien $\tilde{K}(0) = 8500 = \tilde{K}(30)$ moet $\tilde{K}(20)$ het globaal minimum of maximum voor $\tilde{K}(x)$, met $0 \leq x \leq 30$ zijn. Omdat

$$K(20) = 8500 + (-3 + 2)20^3 = 500 < 8500$$

is, vinden we in $x = 20$ het minimum van $\tilde{K}$.

Methode 2, Lagrange multipliers: Stel $g(x, y) = x + y - 30$. Het geldt

$$\begin{aligned}\nabla K(x, y) &= (200 - 4xy, 200 - 2x^2), \\ \nabla g(x, y) &= (1, 1).\end{aligned}$$

We moeten dus het systeem

$$\begin{aligned}200 - 4xy + \lambda &= 0 \\ 200 - 2x^2 + \lambda &= 0 \\ x + y - 30 &= 0\end{aligned}$$

oplossen om de kritieke punten van K met randvoorwaarde g te vinden. De twee eerste vergelijkingen geven samen

$$200 - 4xy = 200 - 2x^2.$$

Na invullen van $y = 30 - x$ en vereenvoudigen, geeft dit

$$0 = -4x(30 - x) + 2x^2 = 6x^2 - 120 = 6x(x - 20).$$

Dus $x = 0$ of $x = 20$. Op het beperkt en gesloten stuk $\{(x, y) \mid x + y = 30, x \geq 0, y \geq 0\}$ neemt K zijn minimum aan. Dit minimum ligt op een van de randpunten of in een van de kritieke punten. Aangezien

$$\begin{aligned}K(0, 30) &= K(30, 0) = 8500 \text{ en} \\ K(20, 10) &= 500,\end{aligned}$$

volgt dat K zijn minimum in het punt $(20, 10)$ aanneemt.

De minimale kost van 500€ wordt dus bij een productie van 20 kg Dolce en 10 kg Amaro bereikt.

Opgave 2: We schrijven

$$k(t) = (2t, t^2 - t, e^t).$$

a) De snijpunten van k met de coördinatenvlakken zijn degene punten van k van wie een coördinaat gelijk aan 0 is.

- xy-vlak: $e^t = 0$ heeft geen oplossing. Dus bestaat er geen snijpunt van k met het xy-vlak
- xz-vlak: $t^2 - t = 0$ als en slechts als $t = 0$ of $t = 1$. Dus zijn de snijpunten van k met het xz-vlak

$$k(0) = (0, 0, 1)$$

en

$$k(1) = (2, 0, e).$$

- yz-vlak: $2t = 0$ als en slechts als $t = 0$. Dit geeft de snijpunt van k met het yz-vlak

$$k(0) = (0, 0, 1).$$

b) De raaklijn van k is evenwijdig met een van de coördinatenvlakken in de punten $k(t)$ voor die een coördinaat van $\frac{dk}{dt}(t)$ gelijk aan 0 is.

$$\frac{dk}{dt}(t) = (2, 2t - 1, e^t).$$

Aangezien $2 = 0$ en $e^t = 0$ geen oplossing hebben, kan de raaklijn van k nooit evenwijdig zijn met het xy- of het yz-vlak. Het geldt $2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. Dus is de raaklijn van k precies in het punt

$$k\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1, -\frac{1}{4}, \sqrt{e}\right)$$

evenwijdig met het xz-vlak.

c) Uit a) weten we dat het enige snijpunt van k met de z-as

$$k(0) = (0, 0, 1)$$

is. Uit b) weten we dat de raaklijn aan k in dit punt gelijk is aan

$$\frac{dk}{dt}(0) = (2, 2 \cdot 0 - 1, e^0) = (2, -1, 1).$$

Het volgt dat de gezochte hoek α voldoet aan

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Dus $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \approx 65,91^\circ$, aangezien $\alpha < 90^\circ$.