Examen Complexe Analyse; Uitwerkingen
vrijdag 23 juni 2011

Vraag 1 Geldt de stelling van Rolle in het complexe vlak ?
Met andere woorden, is het volgende waar?

- *Zij Ω een gebied en $a, b \in \Omega$, $a \neq b$, zodanig dat*

$$[a, b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

Als $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch is met $f(a) = f(b)$ dan is er een $c \in [a, b]$ met

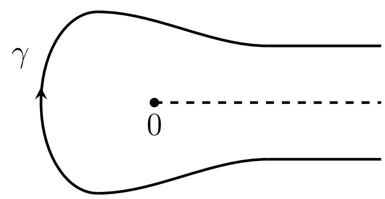
$$f'(c) = 0.$$

Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Antwoord: De stelling van Rolle geldt niet in het complexe vlak. Een eenvoudig tegenvoorbeeld is $f(z) = z^3$. Dan geldt

$$f\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = 1 = f(1),$$

maar nochtans heeft de afgeleide van $f(z)$, $3z^2$, geen nulpunt op het lijnstuk tussen 1 en $e^{2\pi i/3}$.
Een ander voorbeeld is $f(z) = e^{iz}$. Dan $f(0) = f(2\pi)$, maar f' heeft geen nulpunt in $[0, 2\pi]$.



Vraag 2 Zoals bekend is $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ voor $\operatorname{Re} z > 0$. Beschouw de functie f gegeven door de integraal

$$z \mapsto f(z) = \int_\gamma t^{z-1}e^{-t}dt$$

met γ een aan twee kanten onbegrensde contour zoals getoond in de figuur. Voor complexe t is $t \mapsto t^{z-1}$ gedefinieerd met een snede langs de positieve reële as, hetgeen wil zegggen dat

$$t^{z-1} = |t|^{z-1}e^{i(z-1)\arg(t)}, \qquad 0 < \arg t < 2\pi.$$

De integraal is convergent voor elke $z \in \mathbb{C}$ en definieert een gehele functie f op $\mathbb{C}$. Dit hoeft u niet te bewijzen.

(a) Laat zien dat voor $\operatorname{Re} z > 0$ geldt dat

$$f(z) = -2ie^{\pi iz}\sin(\pi z)\Gamma(z).$$

(b) Wat zijn de nulpunten van f in het complexe vlak ?

[U mag gebruiken dat $\Gamma(z) \neq 0$ voor $z \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re} z > 0$.]

<u>Antwoord:</u>

(a) Voor $\operatorname{Re} z > 0$, kunnen we de integraal over γ vervormen tot een integraal van $+\infty$ naar 0 langs de onderkant van de snede, gevolgd door een integraal van 0 to $+\infty$ langs de bovenkant van de snede. Aan de bovenkant van de snede hebben we als randwaarde $t^{z-1} = |t|^{z-1}$, en aan de onderkant is dat $t^{z-1} = e^{2\pi i(z-1)}|t|^{z-1}$. We krijgen dan

$$f(z) = \int_\gamma t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt - e^{2\pi iz}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Dit kan verder uitgewerkt worden tot

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 - e^{2\pi i z}\right) \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \\ &= \left(1 - e^{2\pi i z}\right) \Gamma(z) \\ &= 2ie^{\pi i z} \frac{e^{-\pi i z} - e^{\pi i z}}{2i} \Gamma(z) \\ &= -2ie^{\pi i z} \sin(\pi z) \Gamma(z). \end{aligned}$$

(b) Eerst gebruiken we dat $\Gamma(z) \neq 0$ voor $\operatorname{Re} z > 0$. Wegens de formula uit onderdeel (a) vallen de nulpunten van $f(z)$, voor $\operatorname{Re} z > 0$, samen met de nulpunten van $\sin \pi z$. De functie $z \mapsto \sin \pi z$ heeft nulpunten in $\mathbb{Z}$. De nulpunten van f voor $\operatorname{Re} z > 0$ zijn bijgevolg $1, 2, 3, \ldots$.

De Γ-functie is een meromorfe functie die analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Wegens het identitititeitsprincipe voor analytische functie zet de gelijkheid uit onderdeel (a) zich voort tot deze verzameling. Dus

$$f(z) = -2ie^{\pi i z} \sin(\pi z) \Gamma(z) \text{ voor } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

De Γ-functie voldoet aan de funtionaalvergelijking

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Tesamen met het feit dat $z \mapsto \Gamma(z)$ geen nulpunten heeft voor $\operatorname{Re} z > 0$ betekent dit dat $z \mapsto \Gamma(z)$ geen nulpunt heeft voor $\operatorname{Re} z > -1$. Door inductie volgt hieruit dat $z \mapsto \Gamma(z)$ nergens nulpunten heeft. Dus heeft f geen nulpunten in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

De functie $z \mapsto \sin z$ heeft enkelvoudige nulpunten in $0, -1, -2, \ldots$ en $z \mapsto \Gamma(z)$ heeft daar enkelvoudige polen. Bijgevolg heeft f in die punten een niet-nul functiewaarde.

We concluderen dat de nulpunten van f gegeven worden door de strikt positieve gehele getallen $1, 2, 3, \ldots$.

Vraag 3 (a) Beschouw een veelterm P met onderling verschillende nulpunten $z_1, \ldots, z_n$ en respectievelijke multipliciteiten $m_1, \ldots, m_n$. Neem aan dat $R > |z_j|$ voor alle $j = 1, \ldots, n$. Bereken de twee integralen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{zP'(z)}{P(z)}dz \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,R)} \frac{P'(z)}{zP(z)}dz$$

en geef een zo eenvoudig mogelijke uitdrukking in termen van de nulpunten van P en hun multipliciteiten.

(b) Neem aan dat f analytisch is in $D(0, 1+\varepsilon)$ voor zekere $\varepsilon > 0$ en dat $|f(z)| < 1$ voor $|z| < 1$. Bewijs dat de vergelijking

$$f(z) = z^n$$

precies n oplossingen heeft in de schijf $D(0,1)$. [Oplossingen worden geteld naar gelang hun multipliciteit.]

Antwoord:

(a) Beschouw de eerste integraal. De integrand heeft polen in de nulpunten van P: dus in de punten $\{z_1, \ldots z_n\}$. Wegens de residustelling en het feit dat het contour $C(0,R)$ alle nulpunten van P omvat is de integraal gelijk aan de som van de residuen over alle singulariteiten.

Om de residuen in het punt z_j, $j \in \{1, \ldots n\}$ uit te rekenen moeten we een gevalsonderscheid maken: $z_j = 0$ of $z_j \neq 0$.

Veronderstel eerst dat $z_j \neq 0$. Omdat z_j een m_j-voudig nulpunt is van P kunnen we $P(z)$ schrijven als

$$P(z) = (z - z_j)^{m_j} Q(z)$$

met $Q(z_j) \neq 0$. De afgeleide van P wordt dan gegeven door

$$P'(z) = m_j(z - z_j)^{m_j - 1}Q(z) + (z - z_j)^{m_j}Q'(z),$$

en dus vinden we

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{m_j z}{(z - z_j)} + \frac{zQ'(z)}{Q(z)}.$$

Omdat $Q(z_j) \neq 0$ heeft deze laatste uitdrukking $m_j z_j$ als residue in z_j:

$$\text{Res}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}, z = z_j\right) = m_j z_j.$$

Veronderstel nu dat $z_j = 0$. Dan kunnen we schrijven

$$P(z) = z^{m_j} Q(z),$$

met $Q(0) \neq 0$, en dus

$$\frac{zP'(z)}{P(z)} = m_j + \frac{zQ'(z)}{Q(z)}.$$

Deze laatste functie heeft geen singulariteit in 0, en dus is het residue nul. Dit betekent dat ook voor $z_j = 0$ het volgende geldt:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}, z = z_j\right) = m_j z_j.$$

Samengevat: het resultaat van de eerste integraal is de som van de nulpunten, geteld met respectievelijke multipliciteiten:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{zP'(z)}{P(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} m_j z_j.$$

Voor de tweede integraal merken we op dat de integrand zich gedraagt als $O(z^{-2})$ als $z \to \infty$. Via een ML-afschatting vinden we dan

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{P'(z)}{zP(z)}\, dz \right| \\ &\qquad \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \max \left\{ \left| \frac{P'(z)}{zP(z)} \right| , \, |z| = R \right\} \end{aligned}$$

Voor R groot genoeg kan dit maximum afgeschat worden door een zeker veelvoud van $1/R^2$:

$$\exists M, R_0 \in \mathbb{R}^+ : \forall R \geq R_0 : \max \left\{ \left| \frac{P'(z)}{zP(z)} \right| , \, |z| = R \right\} \leq \frac{M}{R^2}.$$

Hieruit volgt dat de integraal, voor R groot genoeg, kan afgeschat worden door een veelvoud van $1/R$. Aangezien de integraal onafhankelijk is van R volgt hieruit dat ze gelijk is aan 0:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{P'(z)}{zP(z)}\, dz = 0.$$

Voor de tweede integraal was het ook mogelijk om eenvoudigweg de residuen van de integrand te berekenen en op te tellen. Na wat rekenen blijken dan alle termen in die som tegen elkaar weg te vallen, en krijg je opnieuw 0 als resultaat.

(b) *Hier was een fout in de opgave geslopen. In plaats van* $|z| < 1$ *moest er* $|z| \leq 1$ *staan. Met de foutieve voorwaarde kon je* $f(z) := z^n$ *als tegenvoorbeeld opgeven. Als je dit als oplossing gaf, werd het uiteraard volledig goedgerekend. Hier geven we het bewijs met de verbeterde voorwaarde.*

Het bewijs volgt uit een toepassing van de stelling van Rouché. De relevante functies (de g en de f uit de formulering in de cursus) zijn de functies $z^n - f(z)$ en z^n. Voor $z \in C(0,1)$ geldt

$$|(z^n - f(z)) - z^n| = |f(z)| < 1 = |z^n| \leq |z^n| + |z^n - f(z)|.$$

Uit de stelling van Rouché volgt hieruit dat z^n en $z^n - f(z)$ evenveel nulpunten hebben binnen de eenheidscirkel, namelijk n. Dus heeft de vergelijking

$$f(z) = z^n$$

exact n oplossingen in $D(0,1)$.

Vraag 4 Zij Ω gegeven door

$$\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < R,\ y > 0\}$$

met $R > 0$.

(a) Wat is het beeld van Ω onder de afbeelding $z \mapsto e^{iz}$?

(b) Geef een conforme afbeelding van Ω naar het bovenhalfvlak $\mathbb{C}^+$.

(c) Vind een functie $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die continu is op $\overline{\Omega} \setminus \{(0,0)\}$, harmonisch is in Ω, en die voldoet aan

$$\begin{cases} u(0,y) = 1 & \text{voor } y > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{voor } 0 < x < R, \\ u(R,y) = 0 & \text{voor } y > 0. \end{cases}$$

Het volstaat om u uit te drukken in de conforme afbeelding van onderdeel (b).

Antwoord:

(a) Voor $z \in \Omega$ geldt $e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$ met $0 < x < R$ en $y > 0$. Bijgevolg is $|e^{iz}| = e^{-y} < 1$ en $\arg z = x$ ligt tussen 0 en R. Voor $R \leq 2\pi$ is het beeld van Ω de taartpunt

$$\{w \in D(0,1) \mid 0 < \arg w < R\}.$$

Voor $R > 2\pi$ is het de gepuncteerde eenheidsschijf

$$D(0,1) \setminus \{0\}.$$

(b) Er zijn (oneindig) veel mogelijke conforme afbeeldingen naar $\mathbb{C}^+$. Dit is er slechts één van.

- We beginnen met het gebied Ω. Als eerste passen we de herschaling

$$z \mapsto \frac{\pi}{R} z$$

toe. Deze herschaling is equivalent met R te vervangen door π in de beschrijving van Ω. We krijgen dus een strip met lengte π en oneindige hoogte.

- Vervolgens passen we de afbeelding

$$z \mapsto e^{iz}$$

toe. Uit Deel (a) weten we dat het beeld een halve schijf is, namelijk het stuk eenheidsschijf in het bovenste half vlak.

- In de volgende stap passen we een Möbiustransformatie toe:

$$z \mapsto \frac{1+z}{1-z}.$$

Het punt -1 wordt op 0 afgebeeld, 0 op 1, en 1 op ∞. Bijgevolg is het beeld van de halve eenheidsschijf onder de Möbiustransformatie gelijk aan het eerste kwadrant van het complexe vlak.

- De laatste staat bestaat erin de kwadrateren.

$$z \mapsto z^2.$$

Het eerste kwadrant wordt dan afgebeeld op het volledige bovenhalfvlak.

De uiteindelijke conforme afbeelding is de samenstelling van de vier bovenstaanden. Dit wordt dus

$$f(z) = \left(\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{R}z}}{1 - e^{i\frac{\pi}{R}z}} \right)^2.$$

(c) Deze opgave kan opgelost worden door een gepaste continue harmonische functie, zeg v, op het bovenhalfvlak te vinden en dan de conforme afbeelding uit onderdeel (b) te gebruiken. Merk op dat de vorm van de bekomen functie v afhangt van de gekozen conforme afbeelding. Onderstaande oplossing is dus zeker niet de enige correcte oplossing.

De functie u is harmonisch en voldoet aan de volgende eisen:

- $(0, i\infty)$ wordt afgebeeld op 1,
- $(0, R)$ wordt afgebeeld op 0,
- $(R, i\infty)$ wordt afgebeeld op 0.

Om de overeenkomstige functie v op $\mathbb{C}^+$ te vinden moeten we uitzoeken op welke specifieke manier de rand $\partial\Omega$ van Ω wordt afgebeeld op $\partial\mathbb{C}^+ = \mathbb{R}$.

- Het beeld van $(0, i\infty)$ is $(1, +\infty)$,
- Het beeld van $(0, R)$ is $(-\infty, 0)$,
- Het beeld van $(R, i\infty)$ is $(0, 1)$.

Bijgevolg moet v aan de volgende voorwaarden voldoen:

- $(1, +\infty)$ wordt afgebeeld op 1,
- $(-\infty, 1)$ wordt afgebeeld op 0.

Een mogelijke oplossing is dan

$$v(z) := 1 - \frac{1}{\pi} \arg(z - 1)$$

met de hoofdwaarde van het argument. Deze functie is inderdaad continu en harmonisch op $\mathbb{C}^+$ want arg is het imaginair deel van de analytische functie $\log_{-\pi/2}$.

Voor u vinden we dan

$$u(z) = v(f(z)) = 1 - \frac{1}{\pi} \arg(f(z) - 1)$$

met f de conforme afbeelding uit onderdeel (b).