PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA: VEELGEMAAKTE FOUTEN/OPMERKINGEN

Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en veronderstel dat U en W deelruimten van V zijn. Toon aan dat

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Veelgemaakte fouten/opmerkingen: We gebruiken in deze toelichting bij vraag 1 dezelfde notatie als in het boek (bewijs van stelling 3.53).

- De volgorde waarin je de basis voor $U + W$ construeert is belangrijk. Je kiest eerst een basis voor de doorsnede $U \cap W$. Die basis breid je enerzijds uit tot een basis van U en anderzijds tot een basis van W.
- Vaak leggen studenten niet (of niet goed) uit dat de vector $\sum_{k=t+1}^{s} \gamma_k w_k$ tot $U \cap W$ behoort. Je kan ook pas nadat je uitgelegd hebt dat deze vector tot $U \cap W$ behoort, deze vector gaan schrijven als lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_t$.
- Het voortbrengend karakter van $\beta_U \cup \beta_W$ staat in het boek als “vrij eenvoudige oefening”. We verwachten natuurlijk dat je dit expliciet doet in je antwoord.
- Van zodra aangetoond is dat $\beta_U \cup \beta_W$ een basis van $U + W$ is, staat er in het boek: “Hieruit volgt dan onmiddellijk de gewenste dimensieformule.” Hoewel dit natuurlijk maar een detail is, verwachten we toch dat je explicieter zegt dat $\beta_U \cup \beta_W$ uit $t + (r - t) + (s - t) = r + s - t$ elementen bestaat, zodat

$$\dim(U + W) = r + s - t = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)\ .$$

Vraag 2

Waar of fout? Argumenteer je antwoord.

(a) Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zodat voor alle $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ geldt dat $AB = BA$. Dan is $A = \lambda \mathbb{I}_n$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veelgemaakte fouten/opmerkingen:

- Je moet dit aantonen voor een willekeurige $n \times n$-matrix A. Het volstaat dus niet om enkel het geval $n = 2$ te bekijken.
- Het volstaat niet om na te gaan dat voor elke $\lambda \in \mathbb{R}$ en $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ geldt dat $\lambda \mathbb{I}_n B = B \lambda \mathbb{I}_n$. Je moet aantonen dat enkel geldt dat $AB = BA$ voor alle $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als $A = \lambda \mathbb{I}_n$ voor een bepaalde $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Zij U_1, U_2 en U_3 deelruimten van een vectorruimte V. Dan geldt:

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3).$$

Veelgemaakte fouten/opmerkingen:

- Je moet nagaan of dit geldt voor alle mogelijke deelruimten U_1, U_2 en U_3 van een vectorruimte V. Tonen dat deze gelijkheid geldt voor een specifieke keuze van U_1, U_2 en U_3 zegt dus niets over de waarheid van deze stelling. (Deelruimten U_1, U_2 en U_3 vinden waarvoor de gelijkheid niet geldt volstaat natuurlijk wel om aan te tonen dat de uitspraak niet hoeft te gelden.)
- Een fout bewijs: stel $u \in U_1 \cap (U_2 + U_3)$. Dan geldt dat $u \in U_1$ en er bestaan $u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$ zodat $u = u_2 + u_3$. Dit betekent dat $u \in (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$. Deze laatste stap is niet enkel niet goed beargumenteerd, deze is simpelweg niet correct. Dit bewijs werkt dus niet.

(c) De verzameling $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \text{ geldt dat } f(x) = f(x^3)\}$ is een deelruimte van de vectorruimte van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

Veelgemaakte fouten/opmerkingen:

- Een fout bewijs: omdat de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ niet lineair is, is de verzameling $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \text{ geldt dat } f(x) = f(x^3)\}$ geen deelruimte. Dit argument is niet correct.

Vraag 3

Zij $V = \mathbb{R}^3$ en $a, b \in \mathbb{R}$. Stel $v_1 = (a^2, a, 1)$, $v_2 = (0, 0, b)$ en $v_3 = (a, -a, 1)$. Bepaal de dimensie van $\mathrm{vct}\{v_1, v_2, v_3\}$ in functie van de parameters a en b.

Veelgemaakte fouten/opmerkingen:

- Zorg ervoor dat je systematisch alle mogelijk gevallen (in functie van de parameters a en b) bestudeert en dus geen gevallen vergeet te bekijken!