

Bespreking van het examen Complexe Analyse (tweede zittijd)

Bekijk ook de bespreking van het examen van de eerste zittijd (op Toledo).

Het valt hier op dat de scores op sommige vragen wel heel slecht zijn. Nochtans ging het daarbij een paar keer over een bewering in de nota's die moest verklaard worden. Op zo'n vragen kan men zich voorbereiden. Anders was dat met vraag 2, maar daar dacht ik dat de aanwijzing voldoende duidelijk was. Er werd daarbij veelal foute logica gebruikt.

De examenvragen vind je weer op het einde van dit documentje.

Vraag 1.

Alle studenten hebben hier zoals het moest een onderscheid gemaakt tussen de twee gevallen: Het punt ligt buiten of binnen de cirkel. Alle studenten geven telkens de juiste reeksontwikkeling. Er moet in beide gevallen een verwisseling gebeuren van de integraal en de oneindige som. Merkwaardig genoeg zijn er nog steeds een paar studenten die zich daar geen zorgen over maken. En niemand doet dit echt volledig nauwkeurig. Een paar studenten krijgen een foutief resultaat alhoewel dit eenvoudig na te kijken is omdat je eigenlijk een winding getal berekent. Slechts een paar studenten hebben dit ook nog opgemerkt.

Het gemiddelde op deze vraag is 3.4 op 5.

Vraag 2.

Het antwoord op deze vraag is 'ja' en dat was voor bijna iedereen duidelijk. Velen pakken het bewijs echter volledig foutief aan en maken een ernstige logische fout. Men neemt dan een rechthoek en verdeelt die in twee driehoeken door een diagonaal te tekenen. Men past dan zogezegd de stelling van Morera toe op de driehoeken

Voor de juiste argumentatie vermeld je eerst dat het voldoende is te bewijzen dat de integraal over een rechthoekige driehoek nul. Die 'vul' je dan op met kleine rechthoeken. Je weet dat de integraal over al die kleine rechthoeken 0 is. Wat overblijft is een som van vele integralen over kleine driehoekjes. Een paar studenten geraken hier. Maar niemand argumenteert dan verder correct. De integralen over de driehoeken worden wel klein omdat de omtrek van elke driehoek kleiner wordt, maar je krijgt er ook meer en meer. Het resultaat hoeft dus niet klein te zijn. Wel is het zo dat, omwille van de continuïteit van f , de functie in elk van zo'n driehoek ongeveer constant is en daardoor is de integraal ook klein (want de integraal over een driehoek van een constante is 0).

De gemiddelde score is 1.3 op 5.

Vraag 3.

Het juiste antwoord is dat deze bijdrage gelijk is aan $\pi i R$ waarbij R het residu is. Dat is niet verwonderlijk want de integraal over de volledige cirkel zou $2\pi i R$ leveren.

Velen bekomen dit antwoord, maar weinigen argumenteren goed. Best kan je de functie schrijven als

$$z \mapsto \frac{R}{z-a} + g(z)$$

waarbij g overal analytisch is. In de limiet $r \rightarrow 0$ levert het tweede stuk geen bijdrage omdat de lengte van de kromme naar 0 gaat. De bijdrage van het eerste deel is gemakkelijk uit te rekenen.

Het gemiddelde op deze vraag was 2.9 op 5.

Vraag 4.

Deze vraag was blijkbaar moeilijk, zelfs met de hint.

Je moest natuurlijk aantonen dat de gedefinieerde verzameling U open en gesloten was in V . In feite was dat niet zo moeilijk. Om te bewijzen dat die verzameling open is, neem je een punt z in U en kies je een kleine cirkel in V rond z . Alle punten in die kleine cirkel kan je ook bereiken door eenvoudigweg de kromme die eindigt in z te verlengen met een klein lijnstukje tot het andere punt. Om te bewijzen dat de verzameling gesloten is (in V), kies je een rij punten in U met limiet in V . Neem dan weer een kleine schijf rond dit limietpunt. Die schijf zal een van de punten uit de rij bevatten en door de kromme die in dat punt eindigt weer te verlengen door een lijnstukje, krijg je een kromme die eindigt in het limietpunt.

Het gemiddelde op deze vraag was maar 0.6 op 5. Toch was dit een vraag waarop men kon voorbereid zijn omdat het gaat over een bewering die vermeld is in de nota's.

Vraag 5.

Dit is een toepassing van het Riemann mapping theorema. De oefening werd gemaakt in een van de oefeningenzittingen. De vraag werd gesteld in de eerste zitting. En het antwoord werd besproken in het documentje over het examen van de eerste zitting. Je zou dus mogen verwachten dat iedereen deze vraag perfect oplost.

Zoals ook al te lezen stond in de bespreking van het examen van juni ging je als volgt te werk:

Om het bestaan van de functie te bewijzen moest je gewoon twee keer het Riemann mapping theorema gebruiken om twee functies f_1, f_2 te vinden die W_1 en W_2 respectievelijk naar de eenheidsschijf oversturen. Dan neem je de samenstelling van de ene met de inverse van de andere. Je gebruikt het open mapping theorema om aan te tonen dat die inverse nog analytisch is en zo bekom je een analytische functie f die W_1 bijectief afbeeldt op W_2 . Dit onderdeel was voor de meeste studenten geen probleem.

De extra voorwaarde die opgelegd werd, was nu wel correct (want die stond uiteindelijk in de bespreking van het vorige examen). Gegeven twee punten $z_1 \in W_1$ en $z_2 \in W_2$ eis je dat $f(z_1) = z_2$ en dat $f'(z_1) > 0$. Door de uniciteit in het Riemann mapping theorema zelf te gebruiken, kun je dan ook aantonen dat zo'n f uniek is. Maar deze keer was er niemand die dit correct argumenteerde. Je moet twee functies g en f nemen die aan die

voorwaarden voldoen en dan bewijzen dat ze gelijk zijn. Dit doe je door een f_1 te kiezen die van W_1 naar de schijf gaat en z_1 naar 0 stuurt. Dan stel je f en g samen met de inverse van f_1 . Die samenstellingen zijn dan dezelfde omwille van de uniciteitseigenschap in het Riemann mapping theorema. En dan volgt dat $f = g$.

Het gemiddelde voor deze vraag was 3.9 op 5.

Vraag 6.

Deze vraag werd heel slecht beantwoord. En een paar keer niet. Het is juist dat de functie $z \mapsto \frac{1}{t-z}$ analytisch is. Sommige studenten 'bewijzen' dit door te steunen op de stelling van Morera! Het is echter niet juist dat ook de functie $z \mapsto \frac{1}{t-\bar{z}}$ analytisch is. De beschouwde reële functie in deze vraag is het verschil van beide. Ze is niet analytisch, maar wel (een veelvoud van) het imaginair gedeelte van een analytische functie. En zo'n functie is harmonisch omwille van Stelling 2.3 uit deel 1.

Het gemiddelde op deze vraag is ook maar 0.8 op 5.

Vraag 7.

Ook op deze vraag is slecht geantwoord. Om te beginnen moet je het integratiedomein opsplitsen in stukjes waar de gegeven functie F continu is. De integraal over elk van die stukjes levert een analytische functie op (door Morera en verwisselen van integraties, wat een dikwijls voorkomend argument is). De som van eindig veel van die stukken blijft dan analytisch. Maar uiteindelijk zit je nog met een oneigenlijke integraal en moet je nog de limiet van de bovengrens naar ∞ bekijken. Daarvoor gebruik je de afchatting

$$\left| \int_n^\infty F(t)e^{-zt} dt \right| \leq \sup |f(t)| \int_n^\infty e^{-ut} dt$$

wanneer $\operatorname{Re} z \geq u > 0$. Dan gebruik je dat de uniforme limiet van analytische functies weer analytisch is. Veel studenten vergeten deze laatste stap te zetten.

Het gemiddelde op deze vraag is 1.2 op 5. Ook dit was een vraag waarop men zich kon voorbereiden omdat het gaat over een bewering die in de nota's staat.

Vrijdag, 21 augustus 2009.

De resultaten:

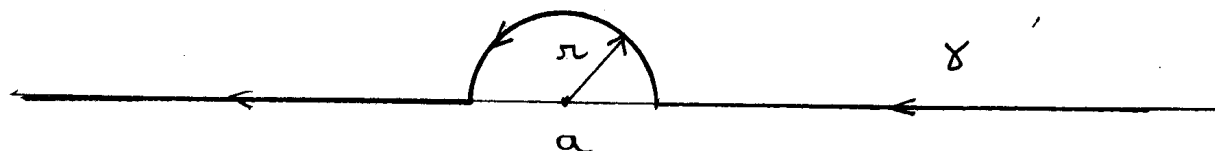
20	
19	
18	
17	
16	
15	
14	
13	
12	x
11	x
10	xx
9	x
8	x
7	x
6	x
5	x
4	
3	
2	
1	
0	

- (1) Definieer $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ door $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$ waarbij $r > 0$. Neem $a \in \mathbb{C}$ en veronderstel dat $|a| \neq r$. Bereken de integraal

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} dz$$

door de functie $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ in reeks te ontwikkelen en te gebruiken dat $\int_{\gamma} z^n dz = 0$ indien $n \neq -1$ en $\int_{\gamma} z^n dz = 2\pi i$ indien $n = -1$.

- (2) Zou de stelling van Morera ook gelden voor rechthoeken i.p.v. driehoeken? Hint: 'Vul' een driehoek op met rechthoeken.
- (3) Neem een punt $a \in \mathbb{C}$ en een functie $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{a\})$. Veronderstel dat f een pool heeft van orde 1 in a . Beschouw een kromme γ als volgt:



Wat is de bijdrage tot de integraal van f over γ van de halve cirkel rond het punt a in de limiet $r \rightarrow 0$?

- (4) Op pagina 6 van deel 3 (Gevorderde theorie) staat ergens in het midden van de bladzijde: *Omdat V open is en samenhangend, bestaat er altijd zo'n kromme.* Bewijs dit. Hint: Definieer U als de verzameling van punten die het eindpunt zijn van zo'n kromme en bewijs dan dat $U = V$.
- (5) Beschouw twee open, samenhangende, enkelvoudig samenhangende echte deelverzamelingen W_1 en W_2 van $\mathbb{C}$. Bewijs dat er een $f : W_1 \rightarrow W_2$ bestaat die analytisch is en bijectief. Kun je extra voorwaarden opleggen zodat er juist één dergelijke functie bestaat?
- (6) In het bewijs van stelling 3.7 uit deel 4 (Toepassingen) wordt 'aangetoond' dat de functie

$$(x, y) \mapsto \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}$$

een harmonische functie is voor elke $t \in \mathbb{R}$ door de partiële afgeleiden expliciet te berekenen. Kun je dit efficiënter? Hint: Gebruik Stelling 2.3 uit deel 1.

- (7) Het bewijs van de priemgetallenstelling steunt uiteindelijk op Stelling 2.1 (pagina 10 van het documentje). Daarin wordt de Laplace getransformeerde G gedefinieerd van een functie $F : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ die begrensd is en stuksgewijs continu. Een eerste bewering is dat die functie G analytisch is. Toon dit aan.

Succes!