Complexe Analyse - Bespreking Examen Juni 2010

Hier volgt een bespreking van het examen van Complexe Analyse op 18 juni. De bedoeling is je de mogelijkheid te geven na te kijken wat je goed en wat je minder goed hebt gedaan. Het is vooral belangrijk natuurlijk voor de studenten die niet geslaagd zijn. Maar ook voor de geslaagde studenten kan het nuttig zijn, vooral dan wanneer je uitslag erg afwijkt van wat je zelf had verwacht.

Je vindt per vraag wat commentaar bij de gegeven antwoorden en een aanzet tot een correct antwoord. Ik heb ook de gemiddelde score per vraag gegeven. Achteraan vind je nog de verdeling van de globale uitslagen. Uiteindelijk heb ik ook de examenvragen hierbij gevoegd.

Er zijn een aantal studenten die werkelijk heel veel en ernstige fouten maken. De grote meerderheid geeft in vele gevallen wel een min of meer correct antwoord, maar toch is het zelden echt heel goed. De antwoorden worden over het algemeen nog steeds veel te slordig opgeschreven. En daarbij bedoel ik niet alleen slordig in de gewone betekenis van het woord, maar ook inhoudelijk erg slordig. Dat heeft misschien te maken met tijdsgebrek. Maar er zijn ook andere redenen. In elk geval zou je daar toch wat meer aandacht aan moeten besteden. Je kan dat ook oefenen: Wanneer je je voorbereidt, schrijf dan ook eens een antwoord helemaal uit. Er zijn ook goede studenten die punten kwijt spelen omdat ze in die zin slordig antwoorden.

Vraag 1.

Vooreerst moest je opmerken dat de functie overal continu is en dat je daarom de Stelling van Morera kan gebruiken om aan te tonen dat ze overal analytisch is. Verder neem je een willekeurige driehoek Γ. Als die helemaal in het bovenste of in het onderste halfvlak ligt, kun je gewoon de stelling van Cauchy voor driehoeken gebruiken. In het andere geval heb je een aantal mogelijkheden. Door de driehoek te verdelen, herleid je dit tot twee gevallen. In het ene geval ligt er een hoekpunt op $\mathbb{R}$. In het tweede geval een ganse zijde. In het eerste geval kon je gewoon verwijzen naar Propositie 4.4. uit deel 1. In het tweede geval moest je argumenteren. Je kon verwijzen naar opgave 8, maar dan moest je die ook wel nog bewijzen. Het komt er op neer dat je dan de driehoek 'benadert' door een driehoek die net iets verschoven is.

De meeste studenten hebben het voorgaande wel allemaal gevonden, maar slechts weinigen hebben echt correct geargumenteerd bij deze laatste stap. In dat geval heb ik 3 tot 3,5 op 5 gegeven.

Een elegante oplossing krijg je door de driehoek Γ te benaderen door Γ_s waarbij $0 < s < 1$ en

$$\Gamma_s(t) = s\Gamma(t) + (1-s)p$$

met p het hoekpunt van de driehoek dat niet op $\mathbb{R}$ ligt. Verder heb je dan uniforme continuïteit nodig van de functie op een compacte verzameling en moet je nog integraal en limiet verwisselen.

Een paar studenten hebben iets analoogs gedaan. Er zijn ook een aantal studenten die gewerkt hebben met verdelingen van de driehoek in vele kleine stukjes. Dat is wat gevaarlijk omdat de integralen over die kleine stukjes wel klein worden, maar je er ook veel hebt.

Slechts een paar studenten zaten er helemaal naast. De gemiddelde score is dus wel voldoende, maar ligt niet heel hoog, namelijk 3.2 (op 5).

Vraag 2.

Merk op dat er (1) een Taylorontwikkeling is voor $|z-i|<1$, (2) een Laurentontwikkeling is voor $1<|z-i|<\sqrt{2}$ en (3) een Laurentontwikkeling voor $|z-i|>\sqrt{2}$.

De meeste studenten vinden de Taylorontwikkeling, maar geen van de twee andere reeksen. De argumenten zijn dan wel goed voor dit geval. Sommige studenten vinden ook nog de derde reeks, maar niet de tweede. En dan zijn er nog een aantal die de drie reeksen vinden en daarbij goed argumenteren.

In het eerste geval heb ik licht onvoldoende gekwoteerd. Dit brengt de gemiddelde score hier op 2.5 op 5.

Vraag 3.

Deze vraag was eerder gemakkelijk. Bijna alle studenten vinden de juiste residu's in de polen i en $-i$. Een aantal studenten geeft wel geen enkel argument voor het feit dat dit polen zijn van eerste orde (wat ik toch uitdrukkelijk gevraagd had). De meesten doen dat wel en min of meer goed. Gelukkig zijn er ook heel wat studenten die dit helemaal correct doen.

De eenvoudigste manier is bijvoorbeeld de gegeven functie te schrijven als $f(z)=\frac{1}{z-i}g(z)$ waarbij je dan opmerkt dat g analytisch is in de omgeving van i en $g(i)\neq 0$. Dan weet je direct dat je een pool hebt van eerste orde in i en dat het residu in i gelijk is aan $g(i)$. Analoog in $-i$.

De gemiddelde score is hier 3.7 op 5.

Vraag 4.

Deze vraag werd niet zo goed beantwoord en dat vind ik wat verbazend. Het is een algemeen geldend resultaat dat de inverse van een differentieerbare functie weer differentieerbaar is, op voorwaarde dat ze continu is. Je kon het bewijs terugvinden op pagina 7 van deeltje 3! Dit argument gaf je dan meteen ook de gevraagde formule voor de afgeleide.

Er zijn nogal wat studenten die gebruik gemaakt hebben van Stelling 2.4 uit deel 3. Dat was niet de bedoeling, maar wel correct. Anderen zoeken het dan weer te ver. Sommigen schrijven dat $z\mapsto exp(z)$ injectief is. Verder zijn er nogal wat studenten die de afgeleide van een functie f in een punt z schrijven als $f(z)'$ wat absoluut een slechte schrijfwijze is die je niet zou mogen gebruiken!

De gemiddelde score op deze vraag is slechts 2.1.

Vraag 5.

Deze vraag was min of meer aan bod gekomen in de 'laatste' les en werd dus ook goed opgelost. Je verkrijgt zo'n functie door $f_1^{-1} \circ f_2$ te nemen waar bij $f_2(a) = 0$ en $f_1(b) = 0$ met functies f_1, f_2 die analytisch zijn en bijectief van D naar D. De functie is niet enig. Wanneer je bijvoorbeeld $f_1^{-1} \circ (\lambda f_2)$ krijg je nog een goede functie voor elke λ in $\mathbb{C}$ van modulus 1. Uniciteit krijg je als je ook eist dat $f'(a)$ reëel is en positief. En je bewijst dit door de uniciteit in het Riemann mapping theorema te gebruiken op de samenstelling van zo mogelijke functies met f_1 (met de extra eis dat $f_1'(b) > 0$).

Over het algemeen werd de vraag dus goed beantwoord. Soms werd wel eens de uniciteit bewezen door te stellen dat f_1 en f_2 uniek zijn indien de afgeleiden in b en a respectievelijk positief zijn. Dit is eigenlijk geen correct argument.

De gemiddelde score op deze vraag compenseert (ruimschoots) de vorige, namelijk 4.0.

Vraag 6.

Om deze integraal op te lossen kon je de functie $z \mapsto \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$ integreren over de kromme γ zoals in Voorbeeld 1.2 uit deel 4 (een lijnstuk $[-R, R]$ op de reële as, gesloten met een halve cirkel in het bovenste halfvlak). Berekenen van het residu in ia is geen probleem en er blijft essentieel maar aan te tonen dat de integraal over de halve cirkel naar 0 gaat als $R \to \infty$. De relevante afschatting is

$$|\int_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} dz| \leq \frac{R^2}{R^2-a^2} \int_0^\pi exp(-R\sin(\theta))d\theta.$$

De eerste factor convergeert naar 1 en levert geen problemen op. De integrand (in de tweede factor) convergeert naar 0 maar je moet wel wat opletten omdat $exp(-R\sin(\theta) \to 0$ voor $0 < \theta < \pi$ maar niet voor $\theta = 0$ of $\theta = \pi$. Dit probleem kan je oplossen door de gedomineerde convergentiestelling te gebruiken. Je kon ook het interval opsplitsen in drie stukjes waarbij je het stukje links en rechts klein houdt.

Op een paar studenten na, heeft iedereen de juiste functie genomen. De meesten hebben ook het goede antwoord gevonden (nl. $\pi \exp -a$) alhoewel er hier en daar toch nog wel een paar foutief rekenen. Velen die gewerkt hebben met de kromme zoals hierboven, hebben wel het laatste probleem over het hoofd gezien.

Verder zijn er nog een paar studenten die met een rechthoek gewerkt hebben om het bovenstaande probleem te omzeilen. Dat kon, maar maakt het wel en stuk moeilijker. En nog een paar keer werd anders afgeschat. Ik veronderstel dus dat deze laatste oplossingen ergens 'circuleerden'? Ze zijn wel correct, maar niet zo natuurlijk.

De gemiddelde score is 3.2.

Vraag 7.

Ik had aangekondigd dat ik een vraag zou stellen over het deeltje over priemgetallen. Verder had ik gezegd dat ik zou rekening houden met het feit dat niet alles kon uitgewerkt worden. Het bewijs van Propositie A.4 was ongetwijfeld gemakkelijk uit te werken met alles wat verder in die appendix stond.

Vooreerst moet je opmerken dat het absoluut convergeren van dit oneindig product, per definitie (A.2) betekent dat ook $\prod(1+|z_n|)$ convergeert. Uit de bewering die je dan vindt vlak voor de propositie haal je dat ook $\sum|z_n|$ convergeert. Dan is het een eigenschap van convergente reeksen dat $|z_n| \to 0$ als $n \to \infty$. Dit impliceert dat $|z_n| < 1$ voor n groot genoeg. Omdat nu convergentie, zowel voor sommen als producten, alleen maar afhangt van de staart, kun je de eerste termen buiten beschouwing laten en dan aannemen dat $|z_n| < 1$ voor alle n.

Dat $z \mapsto \mathrm{Log}(1+z)$ een machtreeksontwikkeling heeft voor $|z| < 1$ volgt uit de stelling van Taylor. Je kon de machtreeks vinden door af de afgeleiden in 0 te berekenen. Je kon de machtreeks ook vinden door ze op te schrijven voor z reëel en dan de identiteitsstelling gebruiken. Maar je moest wel enig argument geven. Dat dan $\mathrm{Log}(1+z) = zf(z)$ met f analytisch voor $|z| < 1$ volgt uit een resultaat over nulpunten omdat $\mathrm{Log}(1) = 0$. Je kon het ook afleiden uit de reeksontwikkling. Je vindt daar dan dat $f(0) = 1$. En wat opletten: De functie f uit het bewijs is niet de functie f uit opgave 4; dat was de Log-functie! Dat $f(z_n) \to 1$ als $z_n \to 0$ volgt uit de continuïteit van f (want f is analytisch). Een convergente rij is begrensd en dus bestaat een M zodat $|f(z_n)| \leq M$ voor elke n. Dan geldt dat $|\mathrm{Log}(1+z_n)| \leq M|z_n|$ voor elke n. Omdat $\sum|z_n|$ convergeert zal dan ook $\sum|\mathrm{Log}(1+z_n)|$ convergeren en dan convergeert ook $\sum \mathrm{Log}(1+z_n)$. Een toepassing van Lemma A.3 geeft dan het gewenste resultaat.

Veel studenten doen dit wel goed, maar anderen hadden dit stukje blijkbaar niet echt bekeken. De gemiddelde score is 3.0.

Uitslagen:

20	
19	x
18	x
17	xxxx
16	xxx
15	xxxx
14	xx
13	xxx
12	xx
11	xx
10	xxx
9	
8	x
7	xxx
6	xx
5	
4	x
3	
2	
1	
0	

Er zijn dus 7 studenten niet geslaagd. De gemiddelde uitslag is 12.5 op 20.

Complexe Analyse Datum: 18 juni 2010 Naam:

---

(1) Veronderstel dat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een continue functie is. Veronderstel ook dat f analytisch is op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Toon aan dat f overal analytisch is. *Aanwijzing*: Kijk naar technieken gebruikt in Propositie 4.4 uit deel 1 en (eventueel) Stelling 3.5 (en 3.6) uit deel 4. Gebruik de stelling van Morera (Stelling 5.2 uit deel 1).

(2) Beschouw de functie f gedefinieerd op $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ door

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Welke zijn de verschillende mogelijke Laurent/Taylor ontwikkelingen $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ van f voor het punt $z_0 = i$. Je hoeft de reeksen niet concreet uit te rekenen. Geef voor elke reeks aan waar ze convergeert (en ook daarvoor is het niet nodig ze uit te rekenen). Probeer wel correct te argumenteren en je antwoord goed op te schrijven.

(3) Definieer de functie f door

$$f(z) = \frac{exp(iz)}{z^2 + 1}$$

voor $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$. Bereken de residu's van f in de twee singulariteiten. Bij deze vraag is het belangrijk om goed te argumenteren.

(4) Veronderstel $W = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ en $f : W \to \mathbb{C}$ continu. Veronderstel verder dat $exp(f(z)) = z$ voor elke $z \in W$. Toon aan dat f differentieerbaar is in elk punt z_0 van W en dat $f'(z_0) = \frac{1}{z_0}$.

(5) Definieer $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Kies twee willekeurige punten a en b in D. Toon aan dat er minstens één functie f bestaat die D bijectief op zichzelf afbeeldt, die analytisch is en zodat $f(a) = b$. Is zo'n functie enig? Indien ja, waarom? Indien nee, kun je extra voorwaarden opleggen om te garanderen dat de functie enig is. Bespreek.

(6) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} \, dx$$

waarbij $a \in \mathbb{R}$ en $a > 0$. Laat je inspireren door de voorbeelden 1.2 en 1.3 uit deel 4. Het is in de eerste plaats belangrijk dat je hier het juiste antwoord vindt. Maar je zou ook hier en daar, maar dan heel beknopt, moeten argumenteren. Met een paar woordjes uitleg bij elke stap kan je duidelijk maken dat je dit begrijpt. Je moet echter geen uitleg geven bij het berekenen van de residu's (want dat is al gebeurd in vraag 3).

(7) Geef wat meer uitleg bij (de verschillende stappen uit) het bewijs van Propositie A.4 uit het deeltje over de priemgetallenstelling. De Log functie is dezelfde als de functie f uit opgave 4 van hierboven met de extra eis dat $f(1) = 0$.

Succes!