Richtlijnen

- Het examen is open-boek in de volgende betekenis: Het handboek, de tekst ivm splines en de slides alsook een afdruk van de illustraties (o.a. jupyter notebooks) mogen op het examen gebruikt worden waarbij er hier en daar iets mag bijgeschreven worden ter verduidelijking. Opgaven van oefeningen en oplossingen mogen NIET gebruikt worden.
- Het examen is volledig schriftelijk.
- Je mag een rekenmachine gebruiken (die natuurlijk geen ingebouwde communicatiemiddelen heeft met de buitenwereld!).
- De totale duur van het examen is 4 uur.
- Begin het antwoord van elke vraag op een nieuw blad want de vragen worden eventueel door verschillende mensen verbeterd.
- Let op de puntenverdeling van de verschillende vragen. Het examen wordt gequoteerd op 20 punten.

Vraag 1: Foutenanalyse (4 punten)

Beschouw de functie

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

We evalueren de functie in $x = 1.00001$ met Matlab op de volgende manier:

```
x = 0.00001
y = (x*x-1)/(x-1)
```

Vraag a) Bespreek de conditie van het probleem ten opzichte van de relatieve fout voor een willekeurige waarde van x.

Vraag b) Bespreek de numerieke stabiliteit van de berekeningsmethode voor een willekeurige waarde van x.

Vraag c) Hoeveel juiste beduidende decimale cijfers verwacht je in het slechtste geval te verliezen voor de formule toegepast voor $x = 1.00001$?

Vraag 2: Stelsels (2 punten)

Gegeven een tridiagonale matrix A, d.w.z. de matrix A bevat enkel niet-nul elementen op de hoofddiagonaal (elementen a_i) en op de diagonaal er juist onder (elementen b_i) en er juist boven (elementen c_i). Toon aan dat wanneer je Gauss-eliminatie toepast *zonder* de rijen te pivoteren om een factorisatie te berekenen $A = LR$, de bovendriehoeksmatrix R enkel niet-nul elementen kan hebben op de hoofddiagonaal en de diagonaal er juist boven terwijl de benedendriehoeksmatrix L enkel niet-nul elementen kan hebben op de hoofddiagonaal en de diagonaal er juist onder. Er wordt dus gevraagd om aan te tonen dat de tridiagonale matrix A kan gefactoriseerd worden als

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} = LR \\ &= \begin{bmatrix} f_1 & & & & & \\ g_1 & f_2 & & & & \\ & g_2 & f_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & g_{n-2} & f_{n-1} & \\ & & & & g_{n-1} & f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & & & & \\ & d_2 & e_2 & & & \\ & & d_3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & d_{n-1} & e_{n-1} \\ & & & & & d_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

waarbij de lege velden nul-elementjes voorstellen.

Vraag 3: Veelterminterpolatie (2 punten)

Stel alle veeltermen $p(x)$ op die aan de volgende interpolatievoorwaarden voldoen:

- $p(0) = 1$
- $p'(-1) = p(1)$ (waarbij $p'(x)$ de afgeleide voorstelt in x)

en die zo laag mogelijke graad hebben.

Vraag 4: Substitutiemethode (5 punten)

Beschouw de functie

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

waarvan we de nulpunten gaan benaderen met de methode van Newton-Raphson.

Vraag a) Bepaal de bijhorende functie $F(x)$.

Vraag b) Zijn er vaste punten? Zo ja, bereken elk van deze vaste punten.

Vraag c) Ga voor elk vast punt na of er lokale convergentie is naar dit vast punt? Zo ja, wat is de convergentiesnelheid (lineair, superlineair, kwadratisch, ...)? Als de convergentiesnelheid linear is, geef dan ook een numerieke waarde voor de convergentiefactor. Komt dit ook overeen met wat je theoretisch weet over de convergentiesnelheid van de methode van Newton-Raphson?

Vraag d) Voor welke startwaarden is er convergentie, voor welke startwaarden is er divergentie? Staaf je antwoord op deze vraag op een grafische manier door voor verschillende karakteristieke gevallen van de startwaarde een schets te maken van het iteratieproces.

Vraag 5: Numerieke integratie (3 punten)

Bepaal de gewichten $H_{-\frac{2}{3}}$, H_0 en $H_{\frac{1}{4}}$ zodanig dat de kwadratuurformule

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx \approx H_{-\frac{2}{3}} f(a - \frac{2h}{3}) + H_0 f(a) + H_{\frac{1}{4}} f(a + \frac{h}{4})$$

een zo hoog mogelijke nauwkeurigheidsgraad heeft.
Wat is deze nauwkeurigheidsgraad?

Vraag 6: Iteratief oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen (4 punten)

We voeren de methode van Gauss-Seidel uit op de volgende matrix A en rechterlid B

$$A = \begin{bmatrix} 23.0 & 10.0 \\ 11.0 & -5.0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 33.0 \\ 6.0 \end{bmatrix}$$

met als startvector X_0

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}.$$

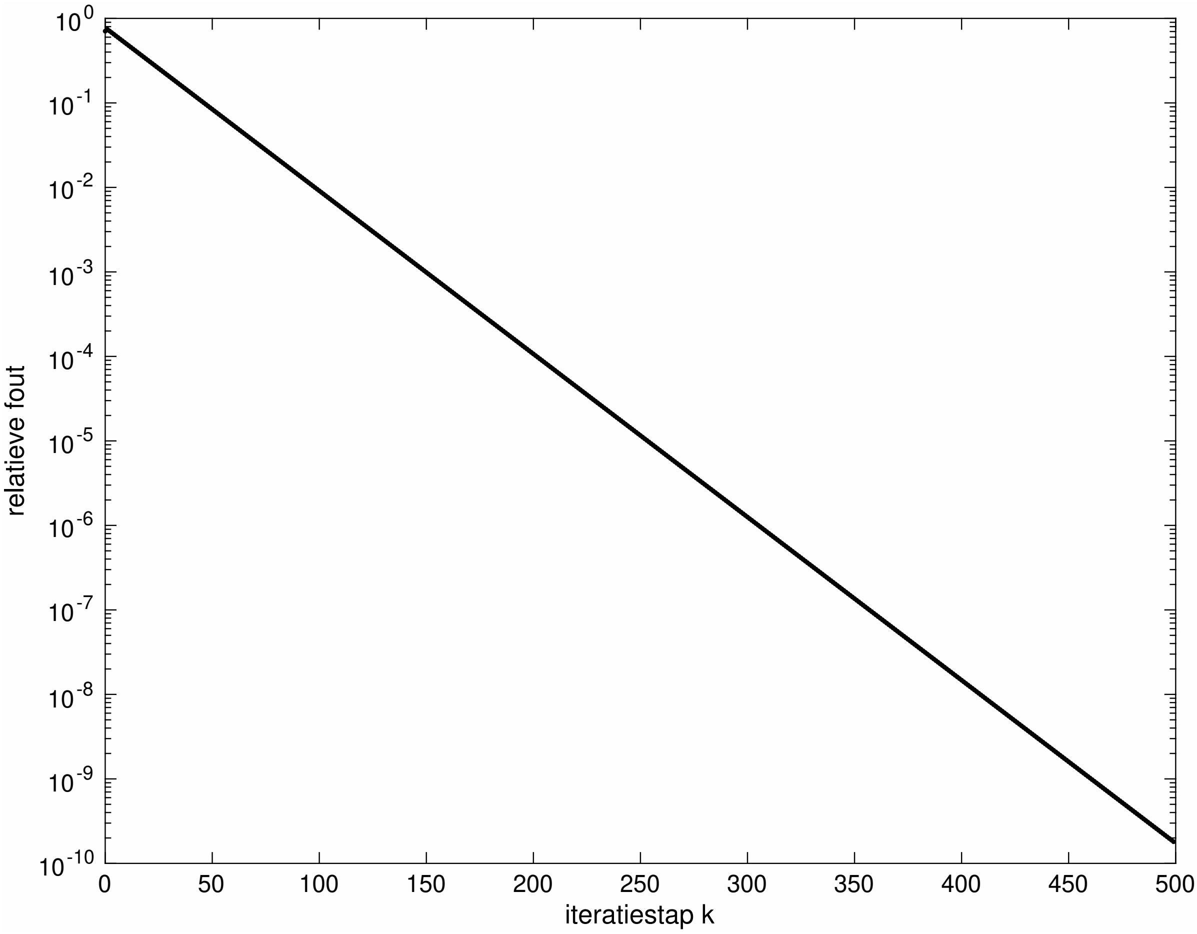
Het is heel eenvoudig na te gaan dat de exacte oplossing van het stelsel de vector X^* is met

$$X^* = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Een grafiek met de relatieve fout

$$\varepsilon_k = \frac{\|X_k - X^*\|_2}{\|X^*\|_2}$$

vind je hieronder terug.



We zien dat de methode convergeert maar zeer traag.

Vraag a) Hoewel de 1-norm van de matrix G zoals gedefiniëerd in de cursus groter is dan 1, treedt er toch convergentie op. Hoe kan dit?

Vraag b) Wat is de theoretische convergentiesnelheid (lineair, superlineair, kwadratisch, ...) en convergentiefactor van deze methode?

Vraag c) Hoe leid je de convergentiesnelheid en convergentiefactor af uit de hierboven gegenereerde grafiek? Bereken een schatting van de waarde van de convergentiefactor enkel gebruik makende van de grafiek van de relatieve fout. Komt deze waarde overeen met de waarde voor de convergentiefactor die uit de theorie volgt?

Vraag d) Schets de methode van Gauss-Seidel grafisch voor dit probleem en verklaar hieruit waarom de convergentie zo traag is.