2 september 2010 om 8.30 uur: Examen 3BACH Kwantummechanica

Noteer op ieder klad blad bovenaan uw naam.
Leg uw studentenkaart zichtbaar op de tafel.

Tijdsschema
Om 10.30h begint de mondelinge ondervraging voor wie minstens twee vragen af heeft. Om 13.00h eindigt het examen. Alle nota's worden afgegeven.

Theorie (10pt)

1. Gebruik een onzekerheidsrelatie om de stabiliteit van materie aan te tonen. Begin bij het waterstofatoom. Breidt daarna uw argumenten uit naar atomen met N (onafhankelijke) elektronen, met N >>1. Hoe hangt de atoomdiameter af van het aantal elektronen N in deze benadering? (6pt)

2. Geef twee voorbeelden, één microscopisch (binnen een atoom) en één macroscopisch (in een experimentele opstelling), van een fysische toestand met **gecorreleerde** spin- en ruimtevariabelen, voor spin-1/2 deeltjes. Schrijf deze toestanden ook formeel neer, met hun ruimte- en hun spinafhankelijkheid, zodat de correlatie duidelijk blijkt uit de wiskundige vorm. Hint: schrijf ook de algemene toestandsvector voor ongecorreleerde spin- en ruimtevariabelen. (4pt)

Oefening (10 pt) Eigenschappen van Bose-Einsteincondensaten

a) Schrijf de Hamiltoniaan neer van de harmonische oscillator met massa m en frequentie ω in drie dimensies. Definieer $a_0=(h/(2\pi m\omega))^{1/2}$. Welke zijn de energieniveaus en welke is de expliciete gedaante van de grondtoestandsgolffunctie $\varphi_0(\mathbf{r})$?

b) Beschouw nu twee identieke bosonen in deze potentiaal. Schrijf de Hamiltoniaan voor het totale system. Verwaarloos eventuele interactie en verwaarloos de spinvariabelen. Bepaal opnieuw de energieniveaus en geef ook de expliciete grondtoestandsgolffunctie $\varphi_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$.

c) Veronderstel nu dat de deeltjes wisselwerken via een potentiaal $V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$, die van zeer korte dracht is vergeleken met de lengte a_0. Dit wil zeggen dat we voor functies f en g die langzaam variëren over afstanden van de orde van a_0 de volgende benadering kunnen maken

$$\iint f(\mathbf{r}_1)\, g(\mathbf{r}_2)\, V(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 \approx (h^2 a/\pi m) \int f(\mathbf{r})\, g(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

M.a.w. de potentiaal werkt als een Dirac delta-distributie met amplitude evenredig met a, de zogenaamde verstrooiingslengte. Voor repulsieve interactie geldt $a>0$, en voor attractieve $a<0$. Gebruik nu eerste-orde storingsrekening en bereken de verschuiving van de grondtoestandsenergie ten gevolge van de interactie tussen de twee deeltjes, tot op eerste orde in a. Onder welke voorwaarde op a en a_0 is deze eerste-orde benadering zinvol?

d) Beschouw nu N identieke bosonen in deze harmonische potentiaal en met interactiepotentiaal $V(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$ tussen elk paar deeltjes i en j. Schrijf de totale Hamiltoniaan van het systeem neer. We trachten nu met behulp van variatierekening een zinvolle bovengrens te berekenen voor de grondtoestandsenergie. We nemen als familie van testgolffuncties de productfuncties

$$\varphi_1(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N) = \varphi_1(\mathbf{r}_1)\varphi_1(\mathbf{r}_2)\ldots\varphi_1(\mathbf{r}_N)$$

waarbij $\varphi_1(\mathbf{r})$ dezelfde functie is als $\varphi_0(\mathbf{r})$ maar met de substitutie $a_0 \rightarrow a_1$. We beschouwen a_1 als een variationele parameter. Toon aan dat de verwachtingswaarde van de totale Hamiltoniaan kan geschreven worden als

$$E(s) = N\, (h/2\pi)\omega\, [(3/4)\, (1/s^2 + s^2) + u/s^3],$$

met $s = a_1/a_0$.

Bepaal u als functie van N, a en a_0.

e) Schets de functie E(s) en bespreek ze kwalitatief. Bepaal de optimale s-waarde voor $u=0$.

Hints: Gebruik de volgende formules, indien nodig.

$\int |\varphi_0(\mathbf{r})|^2\, d\mathbf{r} = 1;\quad \int x^2\, |\varphi_0(\mathbf{r})|^2\, d\mathbf{r} = a_0^2/2;\quad \int |\varphi_0(\mathbf{r})|^4\, d\mathbf{r} = (1/2\pi)^{3/2}/a_0^3$

$\int |\delta\varphi_0(\mathbf{r})/\delta x|^2\, d\mathbf{r} = 1/(2a_0^2)$