

Naam:

Mondeling deel met schriftelijke voorbereiding

Beantwoord de volgende vragen schriftelijk zo volledig mogelijk. Hierbij mag je geen cursusmateriaal gebruiken. Je krijgt hiervoor maximaal 1 uur tijd waarna je dit deel afgeeft en aan het tweede deel begint. Terwijl je daaraan werkt kom je mondeling je antwoorden op één van onderstaande vragen toelichten (je mag zelf kiezen welke). Deze vragen staan elk op 4 van de 20 te behalen punten.

Vraag 1

- (a) Definieer:
 - (i) De dubbelverhouding van vier collineaire punten in $\mathbb{R}P^n$ waarvan er geen drie samenvallen.
 - (ii) De dubbelverhouding van vier hypervlakken H_1, H_2, H_3 en H_4 van $\mathbb{R}P^n$ die tot een bundel hypervlakken behoren en waarvan er geen drie samenvallen.
- (b) Formuleer de transversaliteitseigenschap voor vier hypervlakken H_1, H_2, H_3 en H_4 van $\mathbb{R}P^n$ die tot een bundel hypervlakken met as P^{n-2} behoren en waarvan er geen drie samenvallen en een rechte l die P^{n-2} niet snijdt, en toon deze aan.

Vraag 2

Zij $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^2$ een booglengtegeparametriseerde vlakke kromme.

- (a) Geef en bewijs de formules van Frenet voor β .
- (b) Toon aan dat de absolute waarde van de georiënteerde kromming van β een Euclidische invariant is.
- (c) Toon aan: als $\beta(s) \cdot \beta'(s) = 0$ voor alle $s \in I$, dan is β (een deel van) een cirkel.

Naam:

Schriftelijk deel

Deze oefeningen los je zo volledig mogelijk schriftelijk op. Je mag hierbij gebruik maken van je cursusmateriaal, je eigen nota's en opgeloste oefeningen. Het totale examen mag maximaal 4 uur duren. Elk van deze oefeningen staat op 3 van de 20 te behalen punten. Vouw je kladbladen rond je uiteindelijke oplossingen.

1. Gegeven een driehoek $\triangle ABC$ in $\mathbb{A}^2$, zij M een punt dat niet op (het verlengde van) de zijden van $\triangle ABC$ ligt. Stel $A_1 := AM \cap BC$, $B_1 := BM \cap AC$ en $C_1 := CM \cap AB$. Bewijs de stelling van van Aubel:

$$(M, A_1, A) = (C_1, B, A) + (B_1, C, A),$$

en dit zowel analytisch als synthetisch.

2. Classificeer en bespreek de isometrie $F : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3 : (p_1, p_2, p_3) \mapsto (p_2 - 2, p_3 + 1, 8 - p_1)$.
3. Zij A, A', B, B' paarsgewijs verschillende, niet-collineaire punten in $\mathbb{R}P^2$. Toon aan dat $\{A, A', B, B'\}$ een projectieve ijk is als en slechts als er een projectieve transformatie $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ bestaat zodat $f^2 = \text{Id}$ en

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}.$$

4. Zij $\alpha, \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ verschillende reguliere krommen met $\kappa_\alpha, \kappa_\beta > 0$. We zeggen dat α en β een Bertrand-paar vormen als de normaal van α door $\alpha(s)$ en de normaal van β door $\beta(s)$ samenvallen voor alle $s \in I$. De normaal van α in een punt $\alpha(s_0)$ is de rechte door $\alpha(s_0)$ in de richting van $N(s_0)$ voor $s_0 \in I$. Stel dat α en β een Bertrand-paar zijn, en dat α booglengtegeparametriseerd is met $\tau_\alpha \neq 0$. Dan is $\beta(s) = \alpha(s) + rN_\alpha(s)$ voor een constante $r \in \mathbb{R}_0$. (Dit krijg je gegeven en hoef je niet extra aan te tonen.) Toon het volgende aan:

- (a) De hoek tussen $\alpha'(s)$ en $\beta'(s)$ is constant voor alle $s \in I$.
- (b) Er bestaan constanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zodat $c_1\kappa_\alpha(s) + c_2\tau_\alpha(s) = 1$ voor alle $s \in I$.
- (c) De functie $\tau_\alpha(s)\tau_\beta(s)$ is constant voor alle $s \in I$.