

MEETKUNDE I

(27/01/2011 (9u-14u))

THEORIE

- 1 (a) Definieer de begrippen spiegeling en schuifspiegeling tegen over een een Euclidische deelruimte S van $\mathbb{E}^n$.
- (b) Bewijs dat elke oriëntatieomkerende isometrie van $\mathbb{E}^2$ een schuifspiegeling is.
- (c) In de classificatie van isometrieën van $\mathbb{E}^3$ staan enkel schuifspiegelingen tegenover een vlak expliciet vermeld. Waarom zouden we schuifspiegelingen ten opzichte van S met $\dim S$ respectievelijk 0, 1 of 3 niet vermelden?
- 2 In deze vraag ontwikkelen we een Frenet-theorie voor krommen op een sfeer

$$\mathbb{S}^2 := \{ (p_1, p_2, p_3) \mid p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \}.$$

Voor $p \in \mathbb{S}^2$ definiëren we het raakvlak aan $\mathbb{S}^2$ in p als de deelruimte $T_p \mathbb{S}^2 := \{ v_p \in T_p \mathbb{E}^3 \mid v \cdot p = 0 \}$. De unie van alle raakvlakken aan $\mathbb{S}^2$ noteren we met $T\mathbb{S}^2$ en we definiëren volgende complexe structuur:

$$J : T\mathbb{S}^2 \rightarrow T\mathbb{S}^2 : v_p \mapsto (p \times v)_p.$$

Zij β nu een booglengtegeparametriseerde kromme in $\mathbb{E}^3$ waarvan het beeld in $\mathbb{S}^2$ zit. Voor een vectorveld $Y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{S}^2 : s \mapsto Y(s) \in T_{\beta(s)} \mathbb{S}^2$ langs β definiëren we het vectorveld $\nabla Y : I \rightarrow T\mathbb{S}^2$ langs β als de orthogonale projectie van $Y'(s) \in T_{\beta(s)} \mathbb{E}^3$ op $T_{\beta(s)} \mathbb{S}^2$.

Bewijs achtereenvolgens:

- (a) $T_{\mathbb{S}^2} := \beta'(s)$ behoort tot $T_{\beta(s)} \mathbb{S}^2$ voor alle $s \in I$.
- (b) Als $N_{\mathbb{S}^2}(s) := JT_{\mathbb{S}^2}(s)$, is $\{T_{\mathbb{S}^2}, N_{\mathbb{S}^2}\}$ een orthonormale basis van $T_{\beta(s)} \mathbb{S}^2$.
- (c) Er bestaat een functie $\kappa_{\mathbb{S}^2} : I \rightarrow \mathbb{R}$ zo dat $\nabla T = \kappa_{\mathbb{S}^2} \cdot N_{\mathbb{S}^2}$ en $\nabla N = -\kappa_{\mathbb{S}^2} \cdot T_{\mathbb{S}^2}$.
- (d) Het Frenet-apparaat van β , gezien als kromme in $\mathbb{E}^3$ wordt gegeven door

$$T = T_{\mathbb{S}^2}, \quad N = \frac{\kappa_{\mathbb{S}^2} N_{\mathbb{S}^2} - \beta}{\sqrt{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}}, \quad B = \frac{\kappa_{\mathbb{S}^2} \beta N_{\mathbb{S}^2}}{\sqrt{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}}$$

$$\kappa = \sqrt{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}, \quad \tau = \frac{\kappa'_{\mathbb{S}^2}}{1 + \kappa_{\mathbb{S}^2}^2}.$$

OEFENINGEN

- 1 Beschouwen we een driehoek ABC in $\mathbb{E}^2$ en hierin een ingeschreven cirkel $\mathcal{C}$. De cirkel snijdt de zijden BC , AC en AB in respectievelijk A' , B' en C' . De rechte door B' en C' snijdt BC in het punt A'' . Bewijs dat $(A', B, C) = -(A'', B, C)$.

- 2 (a) Gegeven zijn de vlakken π_1 en π_2 in $\mathbb{A}^4$, beschreven door

$$\pi_1 \leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3t = 1 \\ 4x + 7y - 4z - 7t = 3 \end{cases} \quad \text{en} \quad \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y - z - 3t = 1 \\ 5x + 5y - 2z - 3t = 8 \end{cases}.$$

Bepaal de doorsnede van π_1 en π_2 .

- (b) Bepaal de kleinste affiene deelruimte die deze doorsnede bevat zwak parallel is met de rechten

$$\ell_1 \leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z - t = 0 \\ 2x + 3y - t = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \ell_2 \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \\ t = 1 + 7\lambda \end{cases}.$$

- 3 Vind alle booglengtegeparametriseerde krommen $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3 : s \mapsto \beta(s)$ met strikt positieve kromming die voldoet aan één van volgende voorwaarden:

- (a) $T(s) = (\cos s, \sin s, 0)$
- (b) $N(s) = (\cos s, \sin s, 0)$
- (c) $B(s) = (\cos s, \sin s, 0)$