

LINEAIRE ALGEBRA

(januari)

- [1] a) Gegeven is een eindigdimensionale vectorruimte V , voortgebracht door $v_1, v_2 \dots v_r$. Geef en bewijs de manier waarop we dit voortbrengend deel uitdunnen tot een basis van V . Bewijs dit door met matrices te werken, niet de algoritmische manier.
- b) Geldt deze stelling ook bij oneindigdimensionale vectorruimten waarbij er oneindig veel eigenvectoren en eigenwaarden zijn? Indien ja of nee: argumenteer.
- [2] Gegeven is een lineaire transformatie $\mathcal{A}$ met gegeven eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$, telkens verschillend van elkaar. Ook de eigenvectoren $v_1, v_2 \dots v_r$ zijn gegeven met telkens de bijhorende eigenwaarde λ_i , voor $i = 1 \dots r$. Bewijs dat deze eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn.
Hint: gebruik inductie op r .

- [3] Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Volgende gegevens zijn gegeven:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \text{Im}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A}).$$

- (a) Bepaal de transformatiematrix $M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ ten opzichte van de standaardbasis

$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

- (b) Zouden er basissen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ bestaan zodat de transformatiematrix $M_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}$ is?

$$M_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als zo'n basissen zouden bestaan, geef er. Bestaan ze niet, argumenteer waarom ze er niet zijn.

- [4] a) Bepaal de formules voor $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$ in functie van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ en $\cos(\beta)$. Bewijs deze formules aan de hand van de rotatiematrix rond het centrum in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van twee keer de standaardbasis $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
- b) Voor een vast getal $d \in \mathbb{N}_0$ geldt de lineaire transformatie

$$\mathcal{A}_a : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq d} : f(x) \mapsto f(x + a).$$

Bepaal de waarden van a waarvoor $\mathcal{A}_a$ diagonaliseerbaar is.

- [5] Gegeven is de matrix A waar $c \in \mathbb{R}$. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren die geldt voor alle c .

$$A = \begin{pmatrix} 10 + c & -2 + c & 4 - 2c \\ -2 + c & 10 + c & 4 - 2c \\ 4 - 2c & 4 - 2c & 4 + 4c \end{pmatrix}$$

- 6 Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ waarin U een lineaire deelruimte is. W is een lineaire deelruimte van U . Bewijs dat

$$U^{\perp_{\mathbb{R}^n}} + W = \left(W^{\perp_U}\right)^{\perp_{\mathbb{R}^n}}.$$

- 7 Gegeven is de lineaire afbeelding $f : V \rightarrow W$, waarbij V en W twee eindigdimensionale vectorruimten zijn. Bewijs dat

$$\begin{array}{c} \text{voor alle lineaire afbeeldingen } g : V \rightarrow W \text{ geldt dat } \text{rang}(g) \leq \text{rang}(f) \\ \iff \\ f \text{ is injectief of surjectief.} \end{array}$$