

STATISTISCHE MECHANICA BIJ EVENWICHT

(16/01/2012 (14u-18u))

1 Mean-field oplossing van het Isingmodel.

Bespreek de mean-fieldoplossing van het Isingmodel voor een roostermodeel waarbij elke spin z naaste burens heeft. Zoek een zelfconsistente vergelijking voor de magnetisatie m en toon aan dat er spontane magnetisatie optreedt bij voldoende lage temperaturen.

Zoek de mean-fieldexponenten β en δ die beschrijven hoe m verdwijnt als $T \rightarrow T_C^-$ ($H=0$) en als $H \rightarrow 0$ ($T = T_C$).

2 Maxwellverdeling.

De Maxwellverdeling is een kansverdeling van de snelheid voor een systeem van N deeltjes in evenwicht op een temperatuur T . Geef de meest algemene vorm van de verdeling voor een systeem in d dimensies. Is deze verdeling ook toepasbaar op interagerende systemen? Leg uit.

Leid de kansverdeling af voor de grootte van de snelheid ($v = |\vec{v}|$) in drie en twee dimensies.

3 Ideale fermigas in twee dimensies.

Beschouw een tweedimensionaal systeem van vrije Fermionen met elk een massa m die binnen een oppervlak A bewegen in een evenwicht op temperatuur T .

1. Toon aan dat $g(\varepsilon)d\varepsilon$, de energiedichtheid van een deeltje, constant is in twee dimensies.
2. Gebruik 1. om expliciet de chemische potentiaal μ in functie van T , N en A te berekenen.
3. Vind de Fermi-energie $\varepsilon_F = \lim_{T \rightarrow 0} \mu(T)$. Druk de chemische potentiaal, gevonden in 2. uit in functie van ε_F door A en N uit je vergelijking te elimineren.

4 Mean-field oplossing van het Ising model.

Bereken de tweede viriaalcoëfficiënt van een gas van deeltjes die interageren via de paarpotentiaal gegeven door

$$\phi(r) = \begin{cases} +\infty & \text{voor } 0 < r < \sigma \\ -\varepsilon/r^6 & \text{voor } r > \sigma \end{cases}. \quad (1)$$

We werken in het hoge temperatuurlimiet, waardoor $\varepsilon/\sigma^6 \ll k_B T$.

Vergelijk je resultaat met dat van de lage dichtheidsexpansie (N/V is dus klein) van de van der Waalsvergelijking

$$p = \frac{Nk_B T}{V-b} - \frac{a}{2V^2} \approx \frac{Nk_B T}{V} \left(1 + \frac{b}{V} - \frac{a}{2Nk_B T V} \right)$$

en bepaal de constanten a en b in functie van de constanten in de paarpotentiaal (1).

◇ ◇ ◇