

Inhoudsopgave

1	Gedeelde differenties	1
1.1	Verband met de interpolerende veelterm	1
1.2	Een expliciete formule	2
1.3	Verband met afgeleiden	3
1.4	Verband met de interpolerende veelterm van Newton	4
1.5	Productformule (formule van Leibniz)	4
2	B-splines	5
2.1	Recursieformule	7
2.2	Normalisatie van B-splines	8

1 Gedeelde differenties

1.1 Verband met de interpolerende veelterm

In deze sectie wordt bewezen dat $f[x_0, \dots, x_n]$ gelijk is aan de hoogstegraadscoëfficiënt van de interpolerende veelterm van graad n door de punten $x_0, \dots, x_n$.

Stelling 1. *Voor vaste punten $x_0, \dots, x_k$ is de functie $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f[x_0, \dots, x_k]$ een lineaire afbeelding.*

Stelling 2. *Zij $k \leq r$. Dan is*

$$x^r[x_0, \dots, x_k] = \sum_{e_0 + \dots + e_k = r-k} x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_k^{e_k} \quad (1)$$

We sommeren voor alle duidelijkheid over $\{(e_0, \dots, e_k) \in \mathbb{N} | e_0 + \dots + e_k = r - k\}$.

Voorbeeld 3. 1. $x^5[x_0, x_1] = x_0^4 + x_0^3 x_1 + x_0^2 x_1^2 + x_0 x_1^3 + x_1^4$.

2. $x^3[x_0, x_1, x_2] = x_0 + x_1 + x_2$.

Bewijs. Het bewijs gaat per inductie op k .

1. $\boxed{k = 0}$

$$x^r[x_0] = x_0^r = \sum_{e_0 = r-0} x_0^{e_0} \quad (2)$$

2. $\boxed{k > 0}$

$$x^r[x_0, \dots, x_k] = \frac{x^r[x_0, \dots, x_{k-1}] - x^r[x_1, \dots, x_k]}{x_0 - x_k} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_k} \left(\sum_{e_0 + \dots + e_{k-1} = r-k+1} x_0^{e_0} \dots x_{k-1}^{e_{k-1}} - \sum_{e_1 + \dots + e_k = r-k+1} x_1^{e_1} \dots x_k^{e_k} \right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_k} \left(\sum_{e_1 + \dots + e_{k-1} + \lambda = r-k+1} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_{k-1}^{e_{k-1}} (x_0^\lambda + x_k^\lambda) \right). \quad (5)$$

Hierin kunnen we de factor $\frac{1}{x_0 - x_k}$ in de som zetten en samennemen met $x_0^\lambda + x_k^\lambda$:

$$\frac{x_0^\lambda + x_k^\lambda}{x_0 - x_k} = \sum_{e_0 + e_k = \lambda - 1} x_0^{e_0} x_k^{e_k}, \quad (6)$$

zodat

$$\begin{aligned} x^r[x_0, \dots, x_k] &= \sum_{e_1 + \dots + e_{k-1} + \lambda = r - k + 1} \left(x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_{k-1}^{e_{k-1}} \sum_{e_0 + e_k = \lambda - 1} x_0^{e_0} x_k^{e_k} \right) \\ &= \sum_{e_0 + \dots + e_k = r - k} x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_k^{e_k}. \quad \square \end{aligned} \quad (7)$$

Gevolg 4. 1. $x^r[x_0, \dots, x_r] = 1$ en voor $s > r$ is $x^r[x_0, \dots, x_s] = 0$.

2. Zij f een veelterm van graad n . Dan is $f[x_0, \dots, x_n]$ gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van f .

Bewijs. 1. Uit lemma 2 volgt:

$$x^r[x_0, \dots, x_r] = \sum_{e_0 + \dots + e_r = 0} x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_r^{e_r} = x_0^0 x_1^0 \dots x_r^0 = 1. \quad (8)$$

Omdat de r -de orde gedeelde differentie constant is, zullen alle hogere orde differenties dan gelijk zijn aan 0.

2. Zij $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dan is

$$f[x_0, \dots, x_r] = \sum_{i=0}^n a_i x^i[x_0, \dots, x_r]. \quad (9)$$

Wegens puntje 1 weten we dat voor $i < r$: $x^i[x_0, \dots, x_r] = 0$, en $x^r[x_0, \dots, x_r] = 1$, zodat $f[x_0, \dots, x_r] = a_r$. $\square$

Stelling 5. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en y_n de interpolerende veelterm van graad n door de punten $x_0, x_1, \dots, x_n$. Dan is $f[x_0, \dots, x_n]$ gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van y_n .

Bewijs. Omdat f en y_n dezelfde functiewaarden hebben in $x_0, x_1, \dots, x_n$, zijn hun differenties gelijk. $\square$

Gevolg 6. Een gedeelde differentie is onafhankelijk van de volgorde van de argumenten.

1.2 Een expliciete formule

Stelling 7.

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\pi'(x_j)}, \quad (10)$$

waarbij $\pi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, en dus $\pi'(x_j) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)$.

Bewijs. Noteer

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (11)$$

de i -de basisveelterm van Lagrange. De hoogstegraadscoëfficiënt van ℓ_i is gelijk aan

$$\prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{\pi'(x_i)}. \quad (12)$$

De interpolerende veelterm y_n van f is te schrijven als $y_n = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot \ell_j$, en de hoogstegraadscoëfficiënt van y_n zal dan gelijk zijn aan

$$\sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\pi'(x_j)}. \quad (13)$$

Wegens stelling 5 is dan ook $f[x_0, \dots, x_n]$ hieraan gelijk. $\square$

1.3 Verband met afgeleiden

Stelling 8. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n keer afleidbaar en stel $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Dan is er een $\xi \in [x_0, x_n]$ zodat $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

Bewijs. Zij y_n de interpolerende veelterm door $x_0, x_1, \dots, x_n$. Definieer $g = f - y_n$. Dan is $g(x_i) = 0$ voor elke i . Herhaaldelijk de middelwaardestelling van Rolle toepassen levert ons nulpunten

- $x_0^{(1)}, \dots, x_{n-1}^{(1)}$ van g' , waarbij $x_i^{(1)} \in [x_i, x_{i+1}]$
- $x_0^{(2)}, \dots, x_{n-2}^{(2)}$ van g'' , waarbij $x_i^{(2)} \in [x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}]$
- ...
- $x_0^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}$ van $g^{(n-1)}$, waarbij $x_i^{(n-1)} \in [x_i^{(n-2)}, x_{i+1}^{(n-2)}]$
- $\xi := x_0^{(n)}$ van $g^{(n)}$, dus $\xi \in [x_0^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}] \subset [x_0, x_n]$

Nu is $f^{(n)}(\xi) = y_n^{(n)}(\xi) = n!f[x_0, \dots, x_n]$, omdat $f[x_0, \dots, x_n]$ de hoogstegraadscoëfficiënt is van y_n . Dus is $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ $\square$

Gevolg 9. Zij f een C^n -functie. Dan is

$$\lim_{x_0, \dots, x_n \rightarrow x} f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}. \quad (14)$$

1.4 Verband met de interpolerende veelterm van Newton

Stelling 10. Noteer $\varphi_i = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie en $y_n = \sum_{i=0}^n b_i \varphi_i$ de interpolerende veelterm van graad n . Dan is $b_k = f[x_0, \dots, x_k]$.

Bewijs. Zij y_k de interpolerende veelterm van graad k door $x_0, \dots, x_k$, dan is $y_k = \sum_{i=0}^k b_i \varphi_i$. Inderdaad, voor $j \leq k$ is

$$\sum_{i=0}^k b_i \varphi_i(x_j) = y_k(x_j) - \sum_{i=k+1}^n b_i \varphi_i(x_j) = y_k(x_j) = f(x_j). \quad (15)$$

Dus is $f[x_0, \dots, x_k]$ gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van y_k , en dit is precies b_k . $\square$

1.5 Productformule (formule van Leibniz)

Stelling 11. Zij $f = g \cdot h$. Dan is $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n g[x_0, \dots, x_j] \cdot h[x_j, \dots, x_n]$.

Bewijs. Noteer

- $\varphi_{0j}(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$, de j -de basisveelterm van Newton, en
- $\varphi_{nj}(x) = \prod_{i=j+1}^n (x - x_i)$, de $(n - j)$ -de basisveelterm in achteruit.

Volgens stelling 10 kunnen we dan de interpolerende veelterm y_g van g door de punten $x_0, \dots, x_n$ schrijven als

$$y_g(x) = \sum_{j=0}^n g[x_0, \dots, x_j] \cdot \varphi_{0j}(x), \quad (16)$$

en als we de punten $x_0, \dots, x_n$ in omgekeerde volgorde nemen, kunnen we analoog de interpolerende veelterm y_h van h schrijven als

$$y_h(x) = \sum_{j=0}^n h[x_j, \dots, x_n] \cdot \varphi_{nj}(x). \quad (17)$$

Definieer nu $p = y_g \cdot y_h$. Dan zal voor elk interpolatiepunt x_i zeker $p(x_i) = g(x_i) \cdot h(x_i) = f(x_i)$. Werk p een klein beetje uit:

$$p(x) = y_g(x) \cdot y_h(x) = \left(\sum_{j=0}^n g[x_0, \dots, x_j] \cdot \varphi_{0j}(x) \right) \left(\sum_{k=0}^n h[x_k, \dots, x_n] \cdot \varphi_{nk}(x) \right) \quad (18)$$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n g[x_0, \dots, x_j] \cdot h[x_k, \dots, x_n] \cdot \varphi_{0j}(x) \cdot \varphi_{nk}(x). \quad (19)$$

We bekijken nu de veeltermen $\varphi_{0j} \cdot \varphi_{nk}$ van naderbij. Merk ten eerste op dat φ_{0j} graad j heeft en φ_{nk} graad $n - k$. Dus $\varphi_{0j} \cdot \varphi_{nk}$ heeft graad $n + (j - k)$.

Ten tweede is duidelijk dat voor $i < j : \varphi_{0j}(x_i) = 0$ en voor $i > k : \varphi_{nk}(x_i) = 0$. Wanneer $k < j$ zal ofwel $i < j$ ofwel $i > k$, dus zal $(\varphi_{0j} \varphi_{nk})(x_i) = 0$ voor elk interpolatiepunt x_i . Merk op dat $k < j$ als $\deg(\varphi_{0j} \varphi_{nk}) > n$.

Definieer nu

$$q(x) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j g[x_0, \dots, x_j] \cdot h[x_k, \dots, x_n] \cdot \varphi_{0j}(x) \cdot \varphi_{nk}(x). \quad (20)$$

Met andere woorden, q is p , maar dan zonder de termen met graad groter dan n . Dus zal nog steeds $q(x_i) = p(x_i) = f(x_i)$ voor elk interpolatiepunt x_i . Bovendien is $\deg(q) \leq n$, waaruit volgt dat q de interpolerende veelterm van f door $x_0, \dots, x_n$ is. Wegens stelling 5 is $f[x_0, \dots, x_n]$ dan gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van q . Die vinden we door de coëfficiënten bij de veeltermen $\varphi_{0j}\varphi_{nk}$ van graad n te sommeren. Nu is $\deg(\varphi_{0j}\varphi_{nk}) = n$ als $k = j$. We besluiten dat $f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n g[x_0, \dots, x_j] \cdot h[x_j, \dots, x_n]$. $\square$

2 B-splines

We zoeken een spline-functie die op zo veel mogelijk intervallen (maar niet overal) identiek 0 is. Noem de knooppunten van de verzameling spline-functies waarin we werken, t_i . Om ons niet druk te moeten maken over de randverschijnselen, werken we met (aftelbaar) oneindig veel knooppunten, genummerd in stijgende lijn.

Stelling 12. *Zij $k \geq 0$ en $p \in \mathbb{Z}$. Er bestaat, op een constante factor na, een unieke spline-functie s van graad k zodat*

- $\forall x < t_p : s(x) = 0$,
- $\forall x \geq t_{p+k+1} : s(x) = 0$,
- s is niet de nulfunctie.

Met name is $s(x) = (t-x)_+^k [t_p, t_{p+1}, \dots, t_{p+k+1}]_t$ (de gedeelde differentie naar de veranderlijke t , geëvalueerd in x).

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid stellen we $p = 0$.

- Uniciteit Zij s zo'n functie. We weten dat $\{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\} \cup \{(t_i - x)_+^k | i \in \mathbb{Z}\}$ een basis vormt voor de spline-functies van graad k . We kunnen $s(x)$ dus schrijven als

$$s(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \cdot (t_i - x)_+^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i. \quad (21)$$

Omdat s een spline-functie is, is de beperking van s tot elk interval $[t_j, t_{j+1}[$ een veeltermfunctie. Noteer de overeenkomstige veelterm dan met $s_j \in \mathbb{R}[x]$. Dan is (let op de eerste sommatie)

$$s_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i \cdot (t_i - x)^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i, \quad (22)$$

en dus

$$s_j - s_{j-1} = a_j \cdot (t_j - x)^k. \quad (23)$$

Uit de voorwaarden volgt dat voor $j < 0$ en voor $j > k : s_j = 0$. Hieruit en uit (23) volgt dat voor $j < 0$ en voor $j > k + 1 : a_j = 0$. Maar dan is

$$s_{k+1} = \sum_{i=k+2}^{\infty} a_i \cdot (t_i - x)^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i. \quad (24)$$

Omdat $s_{k+1} = 0$, volgt dan dat alle $b_i = 0$. We kunnen $s(x)$ dus schrijven als

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot (t_i - x)_+^k, \quad (25)$$

en voor $j < 0$ is

$$s_j = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot (t_i - x)^k. \quad (26)$$

Voor $j < 0$ moet $s_j = 0$, en dit is het geval als alle coëfficiënten bij verschillende machten van x gelijk aan nul zijn. De coëfficiënt c_r bij x^{k-r} is gelijk aan

$$c_r = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \binom{k}{r} (-1)^{k-r} t_i^r \sim \sum_{i=0}^{k+1} a_i t_i^r. \quad (27)$$

Dit levert een $(k+1) \times (k+2)$ -stelsel van Vandermonde op:

$$V_k(t_0, \dots, t_{k+1}) \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^k & t_1^k & \dots & t_{k+1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (28)$$

We kunnen dit stelsel uitbreiden tot een vierkantig stelsel van Vandermonde:

$$V = V_{k+1}(t_0, \dots, t_{k+1}) \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^k & t_1^k & \dots & t_{k+1}^k \\ t_0^{k+1} & t_1^{k+1} & \dots & t_{k+1}^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (29)$$

En er geldt: $\mathbf{a}$ is een oplossing van (28) als er een λ bestaat zodat $\mathbf{a}$ een oplossing is van (29).

Voor een vaste λ is dit stelsel uniek oplosbaar. Zij $W = V^{-1}$ en $w_{*,k+1}$ de laatste kolom van W , dan is het duidelijk dat $\lambda w_{*,k+1}$ een oplossing is van (29). Uit onderstaand lemma volgt dat $w_{i,k+1} = \frac{1}{\pi'(t_i)}$. Dus zal $a_i = \frac{\lambda}{\pi'(t_i)}$ en kunnen we, gebruikmakend van (25) en stelling 7, $s(x)$ uiteindelijk schrijven als

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\lambda}{\pi'(t_i)} \cdot (t_i - x)_+^k \quad (30)$$

$$= \lambda \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(t_i - x)_+^k}{\pi'(t_i)} \quad (31)$$

$$= \lambda \cdot (t - x)_+^k [t_0, t_1, \dots, t_{k+1}]_t. \quad (32)$$

- Existentie De gegeven functie voldoet aan de eisen.

□

Lemma 13. *Zij*

$$V = V_n(t_0, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \dots & t_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (33)$$

een Vandermonde-matrix en zij $W = V^{-1}$. Nummer de elementen van de matrices te beginnen bij 0 en zij ℓ_i de i -de basisveelterm van Lagrange, dus $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$. Dan is w_{ij} gelijk aan de coëfficiënt bij x^j in ℓ_i . In het bijzonder is $w_{in} = \frac{1}{\pi'(x_i)}$.

Bewijs. Noteer $f_i(x) = \sum_{k=0}^n w_{ik} x^k$.

$$\delta_{ij} = I_{ij} = (WV)_{ij} = \sum_{k=0}^n w_{ik} \cdot v_{kj} = \sum_{k=0}^n w_{ik} \cdot t_j^k = f_i(t_j). \quad (34)$$

Als $f_i(t_j) = \delta_{ij}$ voor alle j , dan moet $f_i = \ell_i$. Hiermee is het lemma bewezen. □

Definitie 14. De p -de B-spline van graad k wordt gedefinieerd als

$$M_{p,k}(x) := (t - x)_+^k [t_p, \dots, t_{p+k+1}]_t. \quad (35)$$

2.1 Recursieformule

Stelling 15.

$$M_{p,k+1}(x) = \frac{x - t_p}{t_{p+k+2} - t_p} M_{p,k}(x) + \frac{t_{p+k+2} - x}{t_{p+k+2} - t_p} M_{p+1,k}(x). \quad (36)$$

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid veronderstellen we dat $p = 0$. Noteer

- $\pi_0(x) = \prod_{i=0}^{k+1} (x - t_i)$,
- $\pi_1(x) = \prod_{i=1}^{k+2} (x - t_i)$,
- $\pi(x) = \prod_{i=0}^{k+2} (x - t_i)$.

We gebruiken stelling 7:

$$\frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} M_{0,k}(x) = \frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(t_i - x)_+^k}{\pi'_0(t_i)} \quad (37)$$

$$= \frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t_i - t_{k+2}}{t_i - x} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} \quad (38)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{x - t_0}{x - t_i} \cdot \frac{t_{k+2} - t_i}{t_{k+2} - t_0} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)}, \quad (39)$$

waarbij we in de laatste sommatie de term voor $i = k + 2$ mogen toevoegen omdat die toch gelijk is aan 0. Analoog berekenen we:

$$\frac{t_{k+2} - x}{t_{k+2} - t_0} M_{1,k}(x) = \frac{t_{k+2} - x}{t_{k+2} - t_0} \sum_{i=1}^{k+2} \frac{(t_i - x)_+^k}{\pi'_1(t_i)} \quad (40)$$

$$= \frac{t_{k+2} - x}{t_{k+2} - t_0} \sum_{i=1}^{k+2} \frac{t_i - t_0}{t_i - x} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} \quad (41)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{x - t_{k+2}}{x - t_i} \cdot \frac{t_i - t_0}{t_{k+2} - t_0} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)}. \quad (42)$$

Tellen we beide op, dan vinden we:

$$\frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} M_{0,k}(x) + \frac{t_{k+2} - x}{t_{k+2} - t_0} M_{1,k}(x) \quad (43)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{(x - t_0)(t_{k+2} - t_i) + (x - t_{k+2})(t_i - t_0)}{(x - t_i)(t_{k+2} - t_0)} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} \quad (44)$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} = M_{0,k+1}(x). \quad \square$$

2.2 Normalisatie van B-splines

Definitie 16. De p -de genormaliseerde B-spline van graad k wordt gedefinieerd als

$$N_{p,k}(x) := (t_{p+k+1} - t_p) M_{p,k}. \quad (45)$$

Stelling 17. Voor willekeurige x en k is

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = 1. \quad (46)$$

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid veronderstellen we $x \in [t_k, t_{k+1}[$. Voor $p \leq -1$ en $p \geq k + 1$ is dan $N_{p,k}(x) = 0$.

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = \sum_{p=0}^k N_{p,k}(x) \quad (47)$$

$$= \sum_{p=0}^k (t_{p+k+1} - t_p) \cdot (t - x)_+^k [t_p, \dots, t_{p+k+1}]_t \quad (48)$$

$$= \sum_{p=0}^k \left((t - x)_+^k [t_{p+1}, \dots, t_{p+k+1}]_t - (t - x)_+^k [t_p, \dots, t_{p+k}]_t \right), \quad (49)$$

waarbij we in de laatste stap van de recursieve definitie van gedeelde differenties gebruikmaakten. Merk op dat het tweede deel van de term voor p wegvalt tegenover het eerste deel van de term voor $p - 1$. Blijft over:

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = (t - x)_+^k [t_{k+1}, \dots, t_{2k+1}]_t - (t - x)_+^k [t_0, \dots, t_k]_t \quad (50)$$

Omdat $t_0, \dots, t_k$ alle kleiner zijn dan x , is $(t_i - x)_+^k = 0$ voor $i = 0, \dots, k$. Dus is $(t - x)_+^k[t_0, \dots, t_k]_t = 0[t_0, \dots, t_k]_t = 0$.

Omdat $t_{k+1}, \dots, t_{2k+1}$ alle groter zijn dan x , is $(t_i - x)_+^k = (t_i - x)^k$ voor $i = k+1, \dots, 2k+1$. Dus is $(t - x)_+^k[t_{k+1}, \dots, t_{2k+1}]_t = (t - x)^k[t_{k+1}, \dots, t_{2k+1}]_t = 1$, want 1 is de hoogste-graadscoëfficiënt bij t in de veelterm $(t - x)^k$.

We besluiten dat

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = 1 - 0 = 1. \quad \square$$