

Algemener bewijs van de ongelijkheid van Cramér-Rao

Andreas Nuyts

17 januari 2013

Stelling 1. Zij $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ voldoende braaf in $\boldsymbol{\theta}$ en zij $\mathbf{T}$ een schatter voor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$. Noteer met Φ de totale afgeleide van $\mathbf{ET}$ naar $\boldsymbol{\theta}$ in $\boldsymbol{\theta}$:

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial \mathbf{ET}_i}{\partial \theta_j}. \quad (1)$$

Zij $I_n(\boldsymbol{\theta})$ positief-definiet. Dan is

$$\mathcal{V}(\mathbf{T}) - \Phi I_n^{-1} \Phi^T \quad (2)$$

positief-definiet.

Bewijs. We geven een alternatieve uitdrukking voor Φ :

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \mathbf{ET}_i = \int_{\mathbb{R}} T_i(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}} T_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} T_i(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{E} \left(T_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) \right) = \mathbf{E} (T_i(\mathbf{x}) S_{nj}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})) = \mathbf{E} (\mathbf{T} \mathbf{S}_n^T)_{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Definieer $\mathbf{Y} := \mathbf{T} - \Phi I_n^{-1} \mathbf{S}_n \in \mathbb{R}^m$. Merk op dat $\mathbf{ES}_n = \mathbf{0}$, zodat $\mathbf{EY} = \mathbf{ET}$. We berekenen de variantiematrix $\mathcal{V}(\mathbf{Y})$ van $\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{E} [(\mathbf{Y} - \mathbf{EY})(\mathbf{Y} - \mathbf{EY})^T] = \mathbf{E} [(\mathbf{Y} - \mathbf{ET})(\mathbf{Y} - \mathbf{ET})^T] \\ &= \mathbf{E} [((\mathbf{T} - \mathbf{ET}) - \Phi I_n^{-1} \mathbf{S}_n)((\mathbf{T} - \mathbf{ET}) - \Phi I_n^{-1} \mathbf{S}_n)^T] \\ &= \mathcal{V}(\mathbf{T}) + \Phi I_n^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_n^T) I_n^{-1} \Phi^T + M + M^T \\ &= \mathcal{V}(\mathbf{T}) + \Phi I_n^{-1} \Phi^T - M - M^T, \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij we een vervelende term M hebben genoemd. We berekenen nu M , door eerst gebruik te maken van het feit dat $\mathbf{ES}_n = \mathbf{0}$ en daarna van (3):

$$M = \Phi I_n^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{S}_n (\mathbf{T} - \mathbf{ET})^T) = \Phi I_n^{-1} \mathbf{E}(\mathbf{S}_n \mathbf{T}^T) = \Phi I_n^{-1} \Phi^T. \quad (5)$$

We vinden dus dat

$$\mathcal{V}(\mathbf{Y}) = \mathcal{V}(\mathbf{T}) - \Phi I_n^{-1} \Phi^T, \quad (6)$$

en omdat deze matrix een variantiematrix is, is hij positief semi-definiet. $\square$

Gevolg 2 (Stelling zoals in de cursus). Als $m = d$, $\mathbf{g} = \text{Id}$ en $\mathbf{T}$ een onvertekende schatter is voor $\boldsymbol{\theta}$, dan is

$$\mathcal{V}(\mathbf{T}) - I_n^{-1} \quad (7)$$

positief-definiet.

Bewijs. In dit geval is

$$\Phi_{ij} \frac{\partial \text{ET}_i}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \theta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij}, \quad (8)$$

zodat $\Phi = I$ (de eenheidsmatrix). □

Gevolg 3 (Eén van de opmerkingen). *Als $m = d = 1$ en $g = Id$, dan is*

$$\text{Var}_{\theta} T \geq \frac{(1 + b'(\theta))^2}{I_n(\theta)}. \quad (9)$$

Bewijs. In dit geval is

$$\Phi = \frac{\partial \text{ET}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta + b(\theta)) = 1 + b'(\theta). \quad (10)$$

□

Gevolg 4 (Een andere opmerking). *Noteer met Δ de totale afgeleide van $\mathbf{g}$. Als $\mathbf{T}$ een onvertende schatter is voor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$, dan is*

$$\mathcal{V}(\mathbf{T}) - \Delta I_n^{-1} \Delta^T \quad (11)$$

positief-definiet.

Bewijs. $\Phi = \Delta$. □