

Introduction to general relativity

Gereproduceerde versie

18 januari 2017, voormiddag

1 Vraag 1

(Exact oefening 12.4 in Hartle)

Beschouw de ruimtetijd met bepaald door het line element:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1)$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 \quad (2)$$

- a) Vind een coördinatentransformatie analoog aan de Eddington-Finkelstein coördinaten voor de Schwarzschild metriek zodat $g_{rr} = 0$ en toon aan dat de nieuwe metriek niet singulier is in $r = M$.
- b) Schets inkomende en uitgaande (radiële) lichtstralen in een $(\tilde{t}, r)$ -diagram, met $\tilde{t} = v - r$, en teken enkele light cones.
- c) Is dit een zwart gat?

2 Vraag 2

- a) De hoek waarover een lichtstraal wordt afgebogen wanneer deze een object met massa M passeert, wordt voor $M \ll b$ gegeven door $\alpha = \frac{4GM}{c^2b}$. Teken zo'n baan en duid α en b aan. Bepaal de waarde van de impact parameter waarvoor α divergeert.
- b) Geef de volledige afleiding van de lens equation, inclusief tekening. Duid alle relevante afstanden en hoeken aan op de tekening. Geef ook de oplossingen van de lens equation en de formule voor de Einstein angle.
- c) Geef twee toepassingen van gravitational lensing. Wat kunnen we ervan leren (en hoe), etc...

3 Vraag 3

(Oefening 16.3 in Hartle, met nog wat extra)

Gravitational wave spacetime is gegeven in de algemene vorm. Beschouw voor deze oefening de golf bepaald door $f(t - z) = a \sin \omega(t - z) + \delta$. a)

Bereken de fysische afstand tussen een punt op de oorsprong en een punt met coördinaten (X, Y, Z) en toon aan dat die wordt gegeven door

$$L(t) = L_* + \frac{1}{2} \int_0^{L_*} d\lambda h_{ij}(t - n^z \lambda) n^i n^j \quad (3)$$

Teken L in functie van t . Wat is de maximale verandering in afstand die deze gravitatiegolf kan veroorzaken?

b) Een waarnemer heeft een kop koffie vast die helemaal tot op de rand gevuld is op het moment dat er een gravitatiegolf voorbij komt. Neem aan dat de grootte van de kop veel kleiner is dan de golflengte van de gravitatiegolf. Moet de waarnemer zich zorgen maken dat hij koffie morst omwille van de gravitatiegolf? Indien ja, schat hoe hoog de waarnemer zijn kop maximaal mag vullen om te voorkomen dat hij koffie morst.