

Examen algebruh

Uw mama

Om oude examens te volgen: Zeer lit lit, zeer dab dab

January 13 2025

Theorie

Vraag 1

Zij $R, +, \cdot$ een integriteitsdomein. Stel dat $I \triangleleft R$ een maximaal ideaal is. Toon aan dat R/I een veld is.

Vraag 2

Zij $K \subset E$ een velduitbreiding en $a, b \in E$. Zijn volgende uitspraken waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- a) Als a en b algebraïsch zijn over K , dan is $a + b$ algebraïsch over K .
- b) Als a en b transcendent zijn over K , dan is $a + b$ transcendent over K .

Vraag 3

Zij V een eindigdimensionale complexe inproductruimte. Zij A een lineaire transformatie van V . Stel dat V een orthonormale basis van eigenvectoren van A heeft. Toon aan dat A normaal is.

Oefeningen

Vraag 1

Zij $G, \cdot$ een groep. We definiëren dan de groep $G \oplus G, *$ als de groep van het cartesisch product van G met zichzelf en componentsgewijze vermenigvuldiging als groepsbewerking. We definiëren nu

$$D := \{(g, g) \mid g \in G\}$$

- a) Toon aan dat D een deelgroep is van $G \oplus G$.
- b) Toon aan dat D een normaaldeeler is van $G \oplus G$ als en slechts als G commutatief is.
- c) Neem aan dat G commutatief is. Met welke groep is dan $\frac{G \oplus G}{D}$ isomorf?

Vraag 2

Zij $R, +, \cdot$ een ring. We noemen R Artins als elke keten $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ stabiliseert, d.w.z. $\exists N \in \mathbb{N} : I_N = I_n$ voor alle $n \geq N$.

- a) Toon aan dat $\mathbb{Z}, +, \cdot$ geen Artinse ring is.
- b) Zij $R, +, \cdot$ een domein. Toon aan dat R ook een Artinse ring is als en slechts als R een veld is.
- c) Toon nu aan dat elk eindig domein ook een veld is.

Vraag 3

Beschouw $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1 + i\sqrt{2025}})$.

- a) Bepaal de minimale veelterm f van $\sqrt{1 + i\sqrt{2025}}$ over $\mathbb{Q}$, en geef $[K : \mathbb{Q}]$. Werk zorgvuldig uit.
- b) Noem E het ontbindingsveld van f over $\mathbb{Q}$. Vind alle wortels van f in E , en besluit dat $E = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, waarbij α en β goedgekozen wortels van f zijn.

Vraag 4

Zij $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$. De karakteristieke veelterm van A is $(X - 1)^2(X - \lambda)^2$, en de minimale veelterm ervan is $\phi_A = (X - 1)^a(X - \lambda)$ waarbij $a = \{1, 2\}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Bespreek de mogelijke Jordanmatrices van A in functie van λ en a .

Oplossingen¹

Theorievragen

Vraag 1

Proof. We² kunnen dit heel eenvoudig aantonen via contrapositie. Neem aan dat R/I geen veld is. Dan is er een $\bar{x} \in R/I$ zodat voor alle $\bar{y} \in R/I$ geldt dat $\bar{x}\bar{y} \neq \bar{1}$ en $\bar{x} \neq \bar{0}$. Dus is $J = \{i + r \cdot x \mid r \in R, i \in I\} \triangleleft R$ en $J \subsetneq R$. Als immers $J = R$, dan is $1 \in J$, zodat $rx - 1 = -i \in I$, zodat $\bar{r}\bar{x} = \bar{1}$, wat een contradictie is. Dus is nu $I \subsetneq J \subsetneq R$ en is I geen maximaal ideaal is. $\square$

Vraag 2

a) Dit is waar

Proof. Dit bewijs staat letterlijk in de cursus, zie stelling 3.3.7 op pagina 118. Het bewijs gaat als volgt:

Beschouw de velduitbreidingen $F \subset F(a) \subset F(a)(b) = F(a, b)$. Nu zijn $[F(a) : F], [F(b) : F] < +\infty$. Duidelijk zal nu ook $[F(a)(b) : F(a)] < +\infty$, want de minimale van b over F is ook een veelterm in $F(a)[X]$, dus is b algebraïsch over $F(a)$, wat equivalent is met de eindigheid van $[F(a)(b) : F(a)]$. Nu zegt de productformule ons dat $F \subset F(a, b)$ ook een eindige velduitbreiding is. De oplettende lezer heeft ondertussen bemerkt dat $a + b \in F(a, b)$, zodat $F \subset F(a + b) \subset F(a, b)$. Door de eindigheid van de velduitbreiding $F(a, b)$ is nu ook $F(a + b)$ een eindige velduitbreiding zodat $a + b$ algebraïsch is over F . $\square$

b) Dit is mooi niet waar.

Proof. We mogen zonder bewijs gebruiken dat π transcendent is over $\mathbb{Q}$. Dit betekent meteen ook dat $-\pi$ transcendent is over $\mathbb{Q}$, wat eenvoudig gecontroleerd kan worden door een bewijs via contradictie. Als immers $f(-\pi) = 0$ voor een $f \in \mathbb{Q}[X]$, dan kunnen we X vervangen door $-X$ in f om een veelterm te bekomen waar π een wortel is. Maarja, dat kan dus niet. We hebben nu twee transcendent getallen, π en $-\pi$. Je kan nu hopelijk inzien dat $\pi + (-\pi) = 0 \in \mathbb{Q}$ niet bepaald transcendent is. $\square$

Vraag 3

Afkortingen (want ik ben lui)

- Orthonormale basis: ONB

¹We voelden ons dit jaar vriendelijk en hebben besloten om voor de studenten die het moeilijk hebben met dit examen (wat niet erg is) onze oplossingen te geven. Dit in tegenstelling tot de andere mensen die oude examens op deze wiki gezet hebben, wat naar de mening van de auteurs erg cringe is. Om heel eerlijk te zijn is dit voor de theorie natuurlijk een beetje overbodig, maar sommige van deze bewijzen stonden niet in de cursus, dus ja.

²De auteur niet, mijn god ik heb dit op een lelijke manier opgeschreven op het examen.

- Eigenwaarde: EW

- Eigenvector: EV

Proof. Zij $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ een ONB van EV van A voor V met $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de overeenkomstige EW. Door de eindigheid van $\dim V$ heeft A een adjunct A^* . Neem $v \in V$. Dan $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ zodat $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. We gebruiken nu dat alle EV van A ook EV zijn van A^* met EW $\bar{\lambda}_i$. Dus is $A(A^*(v)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\lambda_i|^2 e_i = A^*(A(v))$, als dit niet duidelijk is kan je dit narekenen door gebruik te maken van de lineariteit van A en A^* .³ Nu is dus $A^* \circ A = A \circ A^*$ $\square$

Oefeningen

Vraag 1

a) Deze valt normaal nog wel mee

Proof. Bemerkt eerst dat $D \neq \emptyset$, want $(e_G, e_G) \in D$. Neem $(a, a), (b, b) \in D$. Dan is $(a, a)^{-1} = (a^{-1}, a^{-1}) \in D$. Hiernaast is $(a, a) * (b, b) = (ab, ab) \in D$. Dus gebruiken we het deelgroepencriterium en concluderen we dat D inderdaad een deelgroep is van $G \oplus G$. $\square$

b) De pijl naar rechts heeft me ff vastgezet, maar ik ben dan ook enorm incompetent. De Brit heeft deze met contrapositie gedaan, dus dat is zeker een alternatieve manier om die implicatie te doen. De pijl naar links is het tweede meest triviale ding op dit hele examen.

Proof. Neem aan dat D een normaaldeler is. Dan is $\frac{G \oplus G}{D}$ een goed gedefiniëerde groep. Bemerkt nu dat er voor alle $a, b \in G$ geldt dat $(a^{-1}, b) = (a^{-1}, a^{-1}) * (e_G, ab) = (e_G, ba) * (a^{-1}, a^{-1})$. Dus is $(e_G, ab) = (e_G, ba)$. Doordat $\frac{G \oplus G}{D}$ effectief een groep is, is nu $(e_G, (ba)^{-1}ab) \in D$, wat betekent dat $(ba)^{-1}ab = e_G$. Dus is $ba = ab$ en is G commutatief.⁴

Neem nu aan dat G commutatief is. Dan is $G \oplus G$ ook commutatief.⁵ Aangezien D nu een deelgroep is van een commutatieve groep is het een normaaldeler, want elke normaaldeler van een abelse groep is een normaaldeler. $\square$

c) Ok kijk, door gewoon te kijken naar deze vraag zou je het antwoord al moeten kunnen raden.

Proof. Wow, het antwoord is $\frac{G \oplus G}{D} \cong G$. Zij $\varphi : G \oplus G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab^{-1}$. Dit is een morfisme, $\varphi((a, b) * (c, d)) = ac(bd)^{-1} = ab^{-1}cd^{-1} = \varphi((a, b))\varphi((c, d))$ door de commutativiteit van G . Bemerkt nu dat als $ab^{-1} = e_G$ dat het dan nogal duidelijk is dat $b = a$ door de uniciteit van inverse elementen in een groep. Dus

³Hoe grappig het me ook lijkt om dit op een examen te schrijven, doe dit alsjeblieft niet :)

⁴Lang leve de quotiëntgroep!

⁵Ik heb dit aangetoond op het examen, maar dat is waarschijnlijk overkill, dit is echt wel evident.

is $D = \ker \varphi$. De surjectiviteit van φ is niet zo interessant, $\varphi((a, e_G)) = a$ voor alle $a \in G$. Nu geeft de eerste isomorfismestelling ons precies wat we wouden bewijzen. $\square$

Vraag 2

Dit was van heel het examen losjes de moeilijkste vraag.

a) Deze is strikt genomen niet zo moeilijk, je moet gewoon een beetje wakker blijven en hiernaast niet de idealen $(n!)$ nemen, want deze zijn lelijk.⁶

Proof. Neem de idealen voortgebracht door de machten van 2. Dan is $I_n = 2^n \mathbb{Z}$. Dan geldt er dat $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$.⁷ Deze keten van idealen stabiliseert echter niet, immers zal $2^n \notin 2^{n+1} \mathbb{Z}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodat er nooit een gelijkheid van idealen kan optreden. $\square$

b) Deze vraag had tegelijk de meest triviale en de moeilijkste implicatie in heel het examen. Deze moeilijke had niet moeilijk mogen zijn aangezien het kinda voor de hand ligt uit onze keuze in de vorige deeloefening, maarja dan moet je slim zijn enzo om daar aan te denken en dat zijn we natuurlijk niet.

Proof. Neem eerst aan dat R een veld is. Dan heeft R precies twee idealen, namelijk het nulideaal en R zelf. Dus is het nogal evident dat elke dalende keten van idealen moet stabiliseren, ofwel is die immers heel de tijd R , of wordt (en blijft) die ooit het nulideaal.⁸

Neem nu aan dat R een Artinse ring is. Door de aanname gemaakt in de opdracht dat R een domein is, is R al zeker commutatief en heeft het een eenheidselement. Neem nu $r \in R \setminus \{0\}$ willekeurig. Beschouw nu de keten van idealen $I_n = (r^n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dit is zeker een dalende keten, want $r^{n+1} = r \cdot r^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, waaruit de gewenste inclusie meteen volgt. Nu moet deze keten echter stabiliseren, er is dus een $N \in \mathbb{N}$ zodat $(r^N) = (r^{N+1})$. Gevolg 2.4.3 (pg. 87 in de cursus) zegt ons nu dat r^N en r^{N+1} geassocieerd zijn. Dus is er een $u \in R^\times$ zodat $ur^N = r^{N+1}$. Doordat R een domein is en $r \neq 0$ mogen we nu schrappen om te concluderen dat $u = r$, zodat $r \in R^\times$. We hebben echter $r \in R \setminus \{0\}$ willekeurig genomen. Doordat er altijd geldt dat $R^\times \subset R \setminus \{0\}$ kunnen we nu concluderen dat $R^\times = R \setminus \{0\}$, zodat R inderdaad een veld is. ⁹ $\square$

c) Nee je mag hiervoor niet gewoon de stelling uit de cursus gebruiken. Het is wel leuk om te bemerken dat het principe van het bewijs in de cursus basically hetzelfde argument is als wat we gebruiken hebben in deelvraag b en dan eindigheid van R gebruiken.

⁶he, @mede stormlight fan

⁷Dit is een ZEER belangrijke voorwaarde, r.i.p. mijn goede vriend de communist.

⁸Dit was de triviale

⁹Dit was de moeilijke.

Proof. Neem een keten idealen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ in R . Door de eindigheid van R moet deze keten stabiliseren, anders zouden we oneindig vaak minstens 1 element kwijtspelen, wat simpelweg niet kan, je kan niet oneindig veel van een eindig iets weggooien. Dus is R Artins en bijgevolg een veld door de vorige deeloefening. $\square$

Vraag 3

Deze is wel chill. Bemerk echter wel dat $\sqrt{2025} = 45$. Dit is¹⁰ geen probleem voor deze oefening, maar wel gemeen dat het niet mee op het examen stond. Conclusie: concludeer altijd een keertje ofdat de gegeven wortel wel echt irrationaal is. We noteren uit luiheid trouwens $\alpha = \sqrt{1 + i\sqrt{2025}}$

a) Onthoud alsjeblieft¹¹ dat het criterium van Eisenstein bestaat, het kan je voor een waanzinnig grote hoeveelheid veeltermen heel veel tijd redden.

Proof. Voor de minimale veelterm f moet al zeker $f(\alpha) = 0$. We zoeken dus een veelterm zodat $X = \alpha$ een oplossing is. Dan zal $X^2 - 1 = i\sqrt{2025}$, zodat de veelterm $g = X^4 - 2X^2 + 2026$ een mogelijkheid is. Bemerk nu dat $2 \nmid 1$, $2 \mid (-2) \cdot 2026$ en $4 \nmid 2026$, zodat g irreducibel is door het criterium van Eisenstein. Door eigenschap 3.2.16 in de cursus is g dan ook meteen de minimale van α , zodat $[K : \mathbb{Q}] = 4$ door de structuurstelling voor enkelvoudige velduitbreidingen. $\square$

b)

Proof. We kunnen uit de constructie van g in de vorige deeloefening zien dat de wortels van g in $\mathbb{C}$ precies $\pm\sqrt{1 \pm i\sqrt{2025}}$ zijn. We kunnen nu dus duidelijk $\alpha, \beta = \sqrt{1 \pm i\sqrt{2025}}$ nemen, aangezien de negatieve wortels niet nodig zijn om $E = \mathbb{Q}(\pm\sqrt{1 \pm i\sqrt{2025}})$ voort te brengen. $\square$

Vraag 4

Veys is hier enorm vriendelijk geweest, in sommige oud examens waren de oefeningen op het lineaire algebra gedeelte enorm vaag, maar deze is redelijk eenvoudig gevallenonderscheid. Vergeet echter zeker $\lambda = 1$ niet als geval!¹²

Proof. Geval 1) Veronderstel dat $a = 1, \lambda \neq 1$. De minimale is nu een product van eerstegraads factoren, zodat A diagonaliseerbaar is. De Jordanmatrix van onze matrix is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

¹⁰Gelukkig, anders zware minpuntjes voor mij

¹¹in tegenstelling tot mezelf

¹²r.i.p. Mr. Pauly

Geval 2) Veronderstel dat $a = 2, \lambda \neq 1$. Dan is het invariant systeem van $A - I$ beperkt tot Eig_1 gegeven door $\{2\}$. Aangezien we weten dat $E_\lambda = \text{Eig}_\lambda$ is de Jordanmatrix van A nu gegeven door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Geval 3) Veronderstel dat $a = 1, \lambda = 1$. Dan is $A - I$ nilpotent van index 2. De mogelijke invariante systemen zijn dus $\{2, 1, 1\}$ en $\{2, 2\}$. De overeenkomstige Jordanmatrices zijn dan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 4) Veronderstel dat $a = 2, \lambda = 1$. Dan is $A - I$ nilpotent van index 3, dus vinden we als invariant systeem $\{3, 1\}$, zodat de Jordanmatrix van A gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Dat was het dan, op naar het volgende oud examen en veel succes met het echte examen!