

Examen Analyse II
Tweede bachelor wiskunde
27 augustus 2007

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen, van **9 uur tot 13 uur**. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
 - je cursus,
 - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
 - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van

- een zakrekenmachine of draagbare computer,
- boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes!

Stefaan Vaes

1. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een willekeurig vaak afleidbare, 2π -periodische functie. Noteer met $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, de Fouriercoëfficiënten van f en met $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de rij partiële sommen van de Fourierreeks van f . Neem $k \in \mathbb{N}$.
- Toon aan dat $n^k \widehat{f}(n) \rightarrow 0$ wanneer $|n| \rightarrow \infty$.
 - Toon aan dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $n^k |f(x) - s_n(x)| \rightarrow 0$ wanneer $n \rightarrow +\infty$.

2. Beschouw zoals in Propositie 3.6 op pagina 78, de Banachruimte $X = C([0, 1], \mathbb{C})$ van continue complexe functies op het interval $[0, 1]$, uitgerust met de supremumnorm. Definieer de lineaire afbeelding

$$\omega : X \rightarrow \mathbb{C} : \omega(f) = \int_0^1 f(x) dx .$$

Toon aan dat $\omega \in X^*$ en bereken $\|\omega\|$.

3. Bewijs nauwkeurig de volgende twee uitspraken.

- De verzameling $\{[q, +\infty[\mid q \in \mathbb{Q}\}$ brengt de Borel- σ -algebra op \mathbb{R} voort.
- De verzameling $\{[-a, 2a] \mid a \geq 0\}$ brengt de Borel- σ -algebra op \mathbb{R} **niet** voort.

4. Voor welke waarden van $\alpha, \beta > 0$ is de functie

$$f :]0, 1] \times]0, 1] \rightarrow \frac{1}{\sin(x^\alpha y^\beta)}$$

integreerbaar? Bewijs je antwoord nauwkeurig.

Hint. Bekijk in eerste instantie over hetzelfde domein de functie $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^\alpha y^\beta}$.

5. Beschouw het volume

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-1, 1], (x - z^2)^2 + y^2 \leq 1\} .$$

Verifieer de divergentiestelling voor K en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = ((z + 1)x, 0, z)$.