

Examen Wiskunde I
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie en Informatica
woensdag 25 augustus 2010, 9:00–12:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 vragen. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag de cursustekst en een rekenmachine (niet-symbolisch) gebruiken.
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij \mathcal{K} de kromme die in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$\mathcal{K} : r = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^2, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Het punt P is het snijpunt van \mathcal{K} met de positieve y -as.

- (a) Bereken de Cartesische coördinaten van P en bereken de vergelijking van de raaklijn aan \mathcal{K} in het punt P .
- (b) Bereken de lengte van \mathcal{K} .

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 (a) Bewijs met volledige inductie dat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) De Maxwell-Boltzmann verdeling is

$$f(v) = c_1 v^2 e^{-c_2 v^2}$$

voor zekere constanten $c_1 > 0$ en $c_2 > 0$. Geef de Taylorveelterm van $f(v)$ rond $v = 0$ van graad 4.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Let op dat u onderdelen (b) en (c) van deze vraag kunt maken ook al hebt u onderdeel (a) niet kunnen doen.

- (a) Laat zien dat de totale massa $M(a, b)$ van de oneindige staaf op $[0, \infty[$ met massadichtheid

$$\rho(x) = |x^2 - ax - b|e^{-x} \quad \text{voor } x > 0 \quad \text{met } a, b > 0.$$

gelijk is aan

$$M(a, b) = b + a - 2 + \left(2\sqrt{a^2 + 4b} + 4\right) e^{-c}$$

waarin

$$c = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

- (b) Bereken de partiële afgeleide $\frac{\partial M}{\partial b}$.

- (c) Laat zien dat in een stationair punt (a, b) van $M(a, b)$ geldt dat

$$c = \ln 2.$$

Bij (a) mag u gebruik maken van de onbepaalde integralen

$$\int x e^{-x} dx = -(x + 1)e^{-x} + C, \quad \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$$

die u niet zelf hoeft uit te rekenen.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Beschouw de functie

$$f(x, y) = (x^2 - y)(y - p) \quad \text{met } p \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bepaal alle stationaire punten van f .
- (b) Bepaal de aard van elk stationair punt (lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt) in het geval dat $p > 0$.
- (c) Bepaal de aard van elk stationair punt in het geval dat $p < 0$.

Antwoord: