

Examen Wiskunde I
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie en Informatica
maandag 22 augustus 2011, 9:00–13:00

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 5 vragen. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag de cursustekst en een rekenmachine (grafisch toestel is toegestaan; symbolisch niet) gebruiken. Het rekenmachine wordt gereset bij aanvang van het examen.
- Vermeld uw naam op elk blad.
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Bewijs met volledige inductie dat de som van de eerste n oneven getallen gelijk is aan n -kwadraat. Met andere woorden, bewijs dat voor elke $n \geq 1$ geldt dat

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 (a) Splits de rationale functie

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 + 5x + 2}$$

in partieelbreuken.

(b) Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2x^2 + 5x + 2} dx.$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 De kromme K wordt in poolcoördinaten gegeven door

$$K : r = \frac{1}{1 + \cos \theta}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

De punten P en Q zijn de punten op K die corresponderen met respectievelijk $\theta = -\pi/2$ en $\theta = \pi/2$.

- (a) Laat zien dat K een kegelsnede is. Welke kegelsnede is het (cirkel, ellips, parabool of hyperbool)? Schets de kromme in het xy -vlak.
- (b) De kromme K snijdt de y -as in twee punten P en Q . Bereken de Cartesische coördinaten van P en Q .
- (c) Geef een integraal die de lengte van het deel van K tussen de punten P en Q weergeeft. [N.B.: U hoeft de integraal niet uit te rekenen.]

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Beschouw de functie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$F(x, y) = (x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - r^2)$$

waarin $r > 0$ een vast getal is. De antwoorden op de vragen kunnen afhangen van de waarde van r .

- (a) Schets de niveaokromme $F(x, y) = 0$. Maak hierbij een onderscheid tussen de gevallen $0 < r < 1$, $r = 1$ en $r > 1$.
- (b) Bereken de stationaire punten van F . Hoeveel stationaire punten zijn er?
- (c) Bepaal de aard van het stationaire punt $(0, 0)$. Betreft het een lokaal maximum, lokaal minimum of zadelpunt?

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 Een oliemaatschappij wil een pijpleiding aanleggen van het grondstation aan de kust naar een boorplatform op zee. Omdat de kosten (per lengte-eenheid) voor een leiding op zee vier keer zo hoog zijn als de kosten voor de leiding op land, zou het voordeliger kunnen zijn om de leiding niet direct van het grondstation naar het boorplatform te laten lopen, maar eerst een stuk over land.

We nemen aan dat de kustlijn recht is, en dat coördinaten gekozen worden zo dat het grondstation zich in de oorsprong bevindt en dat de kustlijn samenvalt met de x -as. Het boorplatform bevindt zich in het punt $B : (a, b)$ met $a > 0$ en $b > 0$.

Neem aan dat de pijpleiding over land 1 miljoen euro per kilometer kost.

(a) Laat zien dat de totale kost gelijk is aan

$$K(x) = |x| + 4\sqrt{(a-x)^2 + b^2} \quad \text{miljoen euro}$$

als er voor wordt gekozen om de pijpleiding vanuit $(0, 0)$ langs de kust naar $(x, 0)$ te laten lopen en vervolgens via een rechte naar B .

(b) Voor welke keuze van x is de totale kost minimaal? Uw antwoord hangt af van de waarden van a en b .

(c) Voor welke waarden van a en b wordt het minimum bereikt bij $x = 0$? Schets de verzameling van al deze (a, b) -waarden als een deel van het ab -vlak.

Antwoord: