

Deelexamen 1

kayli.deneef

November 2021

Vraag 1

Bepaal volgende limiet. $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 7x^5} + x^3 - \sin x}{x^2}$

Vraag 2: Vallende ster

Een 'vallende ster', of meteor, is een bal ijs en stof die de atmosfeer binnenkomt en opbrandt, resulterend in een mooi lichtspoor aan de hemel. Stel dat we de meteor modelleren als een perfecte bol, waar de straal afneemt in tijd t als

$$r(t) = r_0 e^{-\alpha t}$$

waarbij r_0 de straal is op tijdstip $t = 0$ en $\alpha > 0$ de opbrandingssnelheid. Tevens heeft de meteor voor een gegeven dichtheid ρ , een massa gegeven door

$$m(t) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3(t)$$

en een snelheid door

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

a Bepaal onder welke voorwaarde(n) de kinetische energie $K = mv^2/2$ (met $m(t)$ de massa) lokale extrema heeft.

b Op welk tijdstip is de kinetische energie maximaal als $v_0 = 0$

Vraag 3: Dalen van vliegtuig

Het aanvliegpad voor een vliegtuig tijdens het landen moet aan een aantal condities voldoen.

1. De daling wordt ingezet wanneer de horizontale afstand tussen het vliegtuig en de landingsbaan gelijk is aan L en het vliegtuig op een constante hoogte h vliegt.
2. Het vliegtuig moet een constante horizontale snelheid v hebben gedurende het volledige aanvliegpad.
3. De absolute waarde van de verticale versnelling mag niet hoger zijn dan een constante k , welke veel kleiner is dan de versnelling onder invloed van zwaartekracht. Met andere woorden, de volgende conditie moet voldaan zijn voor alle x :

$$\left| \frac{d^2 y}{dt^2} \right| \leq k$$

Merk op dat we werken met twee variabelen, de nog af te leggen afstand x en de tijd t . Op $t = 0$ geldt dat $x = L$.

a Veronderstel dat het aanvliegpad, dus de hoogte van het vliegtuig y in functie van de nog af te leggen afstand x , gegeven wordt door een veeltermfunctie $y = P(x)$ van de derde graad. Zoek een expliciete uitdrukking voor deze functie zodat deze aan conditie 1 voldoet. Dit kan je doen door randvoorwaarden op te leggen op $P(x)$ en $P'(x)$ wanneer de daling ingezet wordt op $x = L$ en bij landing op $x = 0$.

b Gebruik randvoorwaarden 2 en 3 om te bewijzen dat

$$\frac{6hv^2}{L^2} \leq k$$

Vraag 4: Omwentelingslichaam

We beschouwen het omwentelingslichaam, gevormd door de gegeven ellips te roteren rond de y -as.

De vergelijking van de ellips is:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$$

waarbij $0 \leq a \leq 1$.

a Bereken het volume van dit omwentelingslichaam.

b Toon aan dat de oppervlakte van dit omwentelingslichaam gelijk is aan

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{1-a^2}} \left[a\sqrt{1-a^2} + \arcsin(\sqrt{1-a^2}) \right]$$

c Toon aan dat de limiet voor $a \rightarrow 1$ van de oppervlakte van het omwentelingslichaam gelijk is aan 4π , het oppervlakte van een bol met straal 1.