

Complexe Analyse

June 27, 2017

1 (2 punten)

Bewijs dat

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad (1)$$

Voor alle z met $\operatorname{Re}(z) > 1$.

2 (2 punten)

Bestaat de limiet

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\cos z}{z} \quad (2)$$

Zo ja, geef de waarde van deze limiet. Zo nee, bewijs.

3 (6 punten)

Bereken de volgende integralen:

3.1 (3 punten)

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z^4} dz \quad (3)$$

Met γ de eenheidscirkel

3.2 (3 punten)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx \quad (4)$$

Hier is $a > 0$.

4 (3 punten)

Gegeven is een functie f die holomorfe is op een 'punctured disk' $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ en waarvoor strikt positieve A, ε bestaan zodat

$$|f(z)| \leq A|z - z_0|^{-1+\varepsilon} \quad (5)$$

voor alle $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Bewijs dat z_0 een ophefbare singulariteit is van f .

5 (3 punten)

Hoeveel nulpunten heeft de veelterm $z^5 + 3z^4 + z + 6$ in de ring $1 < |z| < 2$?
Er was een hint gegeven dat $2^5 = 32$ en $3 \cdot 2^4 = 48$.

6 (5 punten)

Gegeven is het gebied $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$. Het gebied was reeds getekend.

6.1 (4 punten)

Vind een conforme afbeelding van U naar het bovenhalfvlak.

Er was een hint gegeven: beschouw eerst de functie $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en zoek $Re f(z)$ voor $|z| = 1$ en $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

6.2 (1 punt)

Bepaal waarop de cirkels $|z| = 1$ en $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ worden afgebeeld door de conforme afbeelding die je hierboven hebt gevonden.