

Algemene Natuurkunde II

professor P. Van Duppen

Inge Verbeek

2006-2007

Inhoudsopgave

IV Elektriciteit en Magnetisme	1
23 Elektrische velden en de wet van Coulomb	3
23.1 Eigenschappen van elektrische ladingen	3
23.2 Elektrische ladingen door inductie	3
23.3 De wet van Coulomb	4
23.4 Het elektrisch veld	5
23.5 Het elektrisch veld van een continue ladingsverdeling	6
23.6 Elektrische veldlijnen	8
23.7 Beweging van een lading in een uniform elektrisch veld	8
24 De wet van Gauss	10
24.1 Elektrische flux	10
24.2 De wet van Gauss	11
24.3 Toepassing: elektrisch veld ten gevolge van een ladingsverdeling	12
24.4 Geleiders in elektrostatisch evenwicht	15
24.5 Formele afleiding van de wet van Gauss	17
25 Elektrische potentiaal	19
25.1 Potentiaalverschil en elektrische potentiaal	19
25.2 Potentiaalverschil in een uniform elektrisch veld	20
25.3 Elektrische potentiaal en potentiële energie bij puntladingen	22
25.4 Elektrisch veld afleiden uit de elektrische potentiaal	23
25.5 Elektrische potentiaal ten gevolge van een continue ladingsverdeling	25
25.6 Elektrische potentiaal van een geladen geleider	26
25.7 Het Millekan-experiment	28
25.8 Toepassingen	28
26 Condensatoren en diëlektrica	30
26.1 Definitie van Capaciteit	30
26.2 Capaciteit berekenen	30
26.3 Schakelen van condensatoren	32
26.4 Energie opgeslagen in een condensator	33
26.5 Condensatoren met diëlektrica	34
26.6 Een elektrische dipool in een elektrisch veld	34
26.7 Diëlektrica op atomaire schaal	35
27 Elektrische stroom en weerstand	37
27.1 Elektrische stroom	37

27.2 Weerstand	38
27.3 Een model voor elektrische geleiding	39
27.4 Weerstand en temperatuur	39
27.5 Supergeleiders	40
27.6 Elektrische energie en vermogen	40
28 Gelijkstroomkringen	42
28.1 Elektromotorische kracht (emf)	42
28.2 Weerstanden in serie en parallel	43
28.3 Regels van Kirchhoff	44
28.4 RC-keten	44
29 Magnetische velden	46
29.1 Magnetische velden en krachten	47
29.2 Magnetische kracht op een stroomvoerende draad	47
29.3 Krachtenkoppel op een gesloten stroomvoerende geleider in een homogeen magnetisch veld	49
29.4 Beweging van een geladen deeltje in een magnetisch veld	50
29.5 Toepassingen van geladen deeltjes die in elektrische en magnetische velden bewegen	51
29.6 Het Hall effect	52
30 Bronnen van magnetische velden	53
30.1 de wet van Biot-Savart	53
30.2 Magnetische kracht tussen twee stroomvoerende geleiders	55
30.3 de Wet van Ampère	55
30.4 Magnetisch veld van een spoel of solenoïde	56
30.5 Magnetische flux	57
30.6 de wet van Gauss voor magnetische velden	58
30.7 Verplaatsingstroom en de algemene vorm van de wet van Ampère	58
30.8 Magnetische materialen	58
30.9 Magnetisch veld van de aarde	62
V Licht en Optica	63
31 Het karakter van licht en de wetten van de geometrische optica	64
31.1 De aard van licht	64
31.2 De snelheid van het licht	65
31.3 Stralen in de geometrische optica	66
31.4 Reflectie	66
31.5 Breking	67
31.6 Huygens' principe	69
31.7 Dispersie	70
31.8 Totale interne reflectie	71
31.9 Fermats principe	72
32 Beeldvorming	74
32.1 Beeldvorming bij platte spiegels	74
32.2 Beeldvorming bij sferische spiegels	75

Deel IV

Elektriciteit en Magnetisme

Inleiding

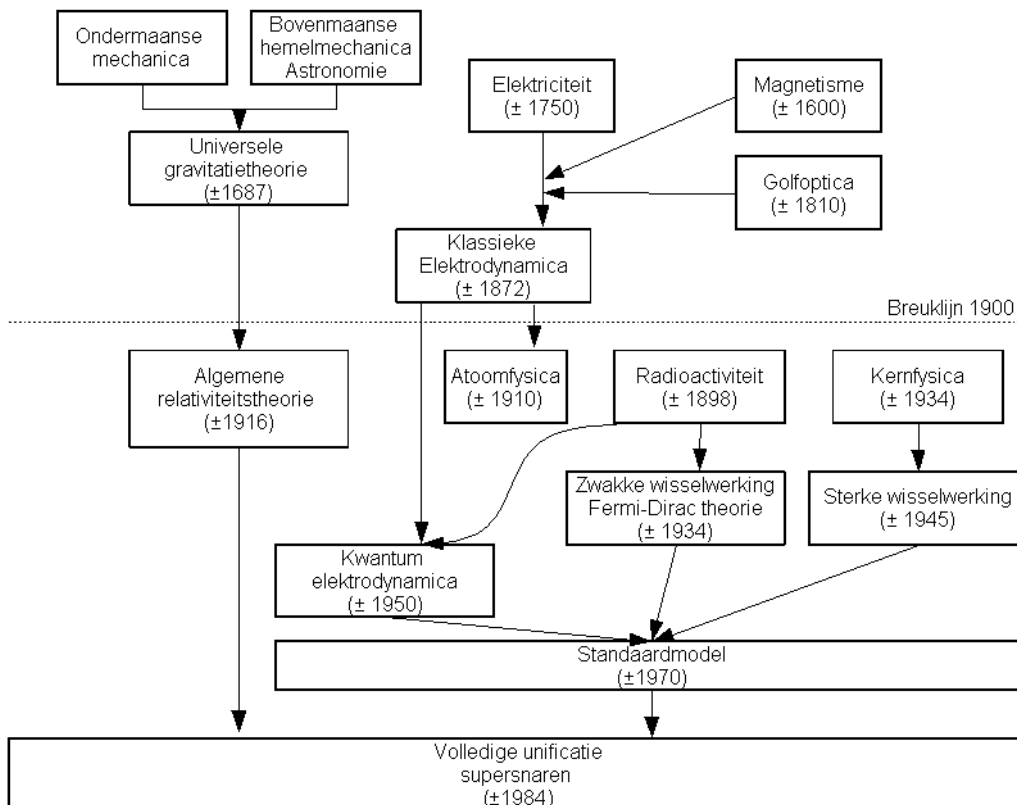
De geschiedenis van de natuurkunde: UNIFICATIE

In de natuurkunde streeft men naar *unificatie*: het samenbrengen van twee dingen die schijnbaar niets met elkaar te maken hebben. Zo werd de ondermaanse mechanica en de bovenmaanse hemelmechanica of astronomie door Newton samengebracht tot de universele gravitatie-theorie. Ook elektriciteit, magnetisme en golfoptica werden door Maxwell en Faraday samengebracht tot de klassieke elektrodynamica.

Rond 1900 is er een breuklijn in de geschiedenis: we staan op de vooravond van een revolutie. Er heerst het gevoel dat we 'alles kennen', dat we alles gehad hebben. Men stapt over van observatie naar experimenten in laboratoria. Het determinisme wordt (met de invoering van de kwantummechanica) verdrongen door waarschijnlijkheid en onzekerheid. Verder gaat men ook van een intrinsieke meeteenheid naar een inherente onnauwkeurigheid.

De vier fundamentele interacties

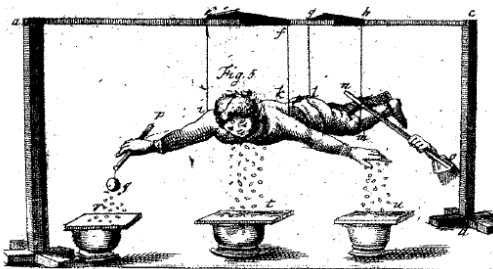
De elektromagnetische interactie (positieve en negatieve ladingen, elektronbanen rond de atoomkern), de sterke interactie (nucleonen: protonen en neutronen) en de zwakke interactie (radioactief β -verval) zijn al samengebracht in het standaardmodel. Men wil natuurlijk ook de gravitonele interactie (planeten, zwaartekracht) hiermee in verband brengen, maar dit is moeilijk omdat deze veel kleiner is dan de anderen.



Hoofdstuk 23

Elektrische velden en de wet van Coulomb

23 Electric Fields, blz. 706-761



Het bestaan van elektrische lading en elektrische krachten kennen we uit dagelijkse fenomenen. Voorwerpen, inclusief personen, kunnen elektrisch opgeladen worden. In dit hoofdstuk bestuderen we de elektromagnetische kracht tussen geladen deeltjes. Dit is één van de vier fundamentele natuurkrachten.

23.1 Eigenschappen van elektrische ladingen

23.1 Properties of Electric Charges, blz. 707-709

Er bestaan twee soorten ladingen: positieve (vb: proton) en negatieve ladingen (vb: elektron). Experimenten hebben enkele principes aangetoond:

- Tegengestelde ladingen trekken elkaar aan en gelijke ladingen stoten elkaar af.
- In een geïsoleerd systeem is er behoud van totale lading. Er is enkel transfer van elektrische lading.
- Elektrische lading is gekwantiseerd: er zijn geen fracties. Er bestaat dan ook een fundamentele, elementaire elektrische lading e met $|e| = 1,60219 \cdot 10^{-19} C$: de lading van één elektron of proton. We kunnen elke elektrische lading q dus schrijven als $N \cdot e$, met $N \in \mathbb{N}$

23.2 Elektrische ladingen door inductie

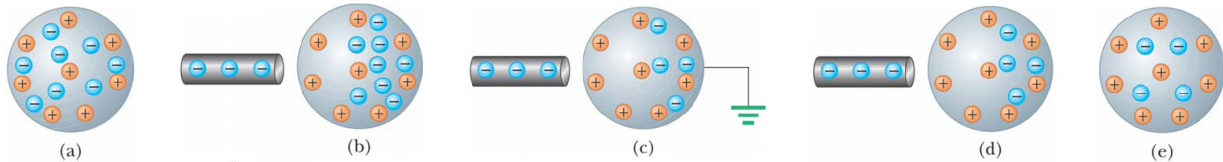
23.2 Charging Objects By Induction, blz. 709-711

Elektrische *geleiders* [*conductors*] zijn materialen waarin sommige elektronen vrij zijn. Omdat deze elektronen niet gebonden zijn aan atomen kunnen ze vrij bewegen doorheen het materiaal. Materiaal zoals koper, aluminium en zilver zijn goede geleiders.

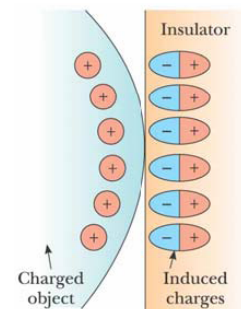
Elektrische *isolators* [*insulators*] zijn materialen waarin alle elektronen gebonden zijn aan atomen en dus bijgevolg onbeweeglijk zijn. Tot deze categorie behoren materialen zoals glas, rubber en hout.

Elektrische *halfgeleiders* [*semiconductors*] zitten ergens tussen een isolator en een geleider. Voorbeelden hiervan zijn silicone en germanium.

We kunnen een voorwerp een lading geven met behulp van *inductie* door 5 stappen te volgen die geïllustreerd zijn in onderstaande figuur. We starten met een neutrale, ongeladen sfeer van een geleidend materiaal (a). Door een negatief geladen staaf in de buurt van de sfeer te houden gaan de negatieve ladingen in de sfeer naar de tegenovergestelde richting verhuizen (b). Dan verbinden we de sfeer met de aarding (c), waardoor het teveel aan negatieve ladingen aan die kant van de sfeer zal weggenomen worden. Wanneer we nu de aarding weghalen (d) en nadien ook de geladen staaf (e), blijft er een positief geladen sfeer achter wegens het tekort aan elektronen. Hierbij moeten we opmerken dat de geladen staaf de sfeer niet moet raken.



Bij een voorwerp van een isolerend materiaal is er een gelijkaardig proces, namelijk *polarisatie*. Door een geladen sfeer tegen een isolator te houden gaan de atomen in de isolator zich polariseren. Dit wil zeggen dat het atoom aan de ene kant lichtjes positief en aan de andere kant lichtjes negatief geladen wordt, maar de elektronen zijn niet vrij dus het totale atoom blijft wel neutraal. Op deze manier wordt de rand van de isolator geladen, maar in de kern compenseren de positieve en de negatieve ladingen elkaar dus daar is de sfeer neutraal.



23.3 De wet van Coulomb

23.3 Coulomb's Law, blz. 711-715

We gebruiken de term *puntlading* [*point charge*] voor een deeltje met afmeting 0 dat elektrisch geladen is. Bij een *vector* geven de richting, de zin en de grootte alleen informatie over het aangrijpingspunt.

De wet van Coulomb

De *wet van Coulomb* voor twee puntladingen q_1 en q_2 (eenheid Coulomb: C) zegt dat

$$F_{12} = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad \text{en} \quad \vec{F}_e = \vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Hierbij is \vec{F}_{12} de kracht die q_1 uitoefent op q_2 , en er geldt $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. In de formule is k_e de *Coulomb constante*, met $k_e = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 = 1/4\pi\epsilon_0$. De afstand tussen q_1 en q_2 stellen we voor door r en de eenheidsvector van q_1 naar q_2 is \hat{r} . Verder is ϵ_0 gelijk aan de permitiviteit van vacuüm, met $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$.

Superpositieprincipe van krachten

De totale kracht \vec{F}_1 die een lading q_1 ondervindt van de ladingen q_2, q_3, q_4, \dots rondom zich, is gelijk aan $\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots$

We kunnen dit superpositieprincipe ook toepassen op de Coulombkracht en de gravitatiekracht die samen op een geladen deeltje werken, maar omdat de gravitatiekracht in verhouding tot de Coulombkracht zo klein is, zullen we meestal de gravitatiekracht verwaarlozen.

23.4 Het elektrisch veld

23.4 The Electric Field, blz. 715-719

De elektrische kracht \vec{F}_e werkt ook zonder contact en door de lege ruimte. Er is wel pas een elektrische kracht vanaf dat er minstens twee ladingen in de ruimte aanwezig zijn. Het *gravitatieveld* $\vec{g} = \vec{F}_g/m$ is onafhankelijk van de massa en werkt zelfs zonder massa.

Het *elektrisch veld* veroorzaakt door een bronlading q is in elk punt van de ruimte gegeven door de elektrische veldvector \vec{E} , en ze bestaat wanneer een testlading op dat punt een elektrische kracht ondervindt. De elektrische veldvector \vec{E} is gelijk aan de elektrische krachtvector \vec{F}_e die op een positieve testlading q_0 werkt, gedeeld door de elektrische lading van de testlading.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \quad \text{of nog} \quad \vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad \text{met als eenheid} \quad \frac{N}{C} = \frac{kg \cdot m}{s^2 \cdot C}$$

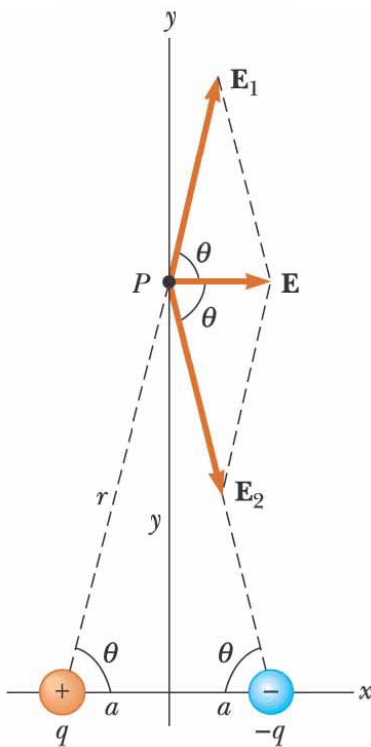
Dit elektrisch veld is ook aanwezig zonder testlading, en hangt niet af van de waarde van q_0 . De kracht op een lading q_0 in een elektrisch veld \vec{E} wordt dan gegeven door $\vec{F}_e = q_0 \cdot \vec{E}$, en is wel afhankelijk van de waarde van q_0 .

Ook hier geldt het superpositieprincipe $\vec{E}_{\text{totaal}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$, dat we kunnen herschrijven tot

$$\vec{E}_{\text{totaal}} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i .$$

Toepassing: elektrisch veld ten gevolge van een elektrische dipool

Example 23.6, blz. 719



Een elektrische *dipool* bestaat uit een positieve lading $+q$ en een negatieve lading $-q$ op een afstand $2a$ van elkaar.

We berekenen het elektrisch veld op een rechte tussen de twee ladingen, loodrecht op hun verbindingsas. We kiezen een willekeurig punt P op deze rechte, dus niet het snijpunt met de x -as en geen punt op oneindig. Er zal gelden dat de y -componenten elkaar opheffen, en dat de x -componenten elkaar versterken. We bekomen dan volgende uitdrukking voor het elektrisch veld op de scheidingsrechte:

$$E = k_e \frac{2qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

Indien y veel groter is dan a , lijkt een dipool op een neutraal deeltje:

$$E_{\text{dipool}} \approx k_e \frac{2qa}{y^3} \approx k_e \frac{2qa}{r^3} .$$

Voor een monopool geldt, zelfs vanop verre afstand, dat

$$E_{\text{monopool}} = k_e \frac{q}{r^2} .$$

23.5 Het elektrisch veld van een continue ladingsverdeling

23.5 Electric Field of a Continuous Charge Distribution, blz. 719-723

Wanneer de afstanden tussen ladingen in een groep veel kleiner is dan de afstand van de groep tot het punt P waarin we geïnteresseerd zijn, bekijken we de groep ladingen als een continue ladingsverdeling [charge distribution] op een volume.

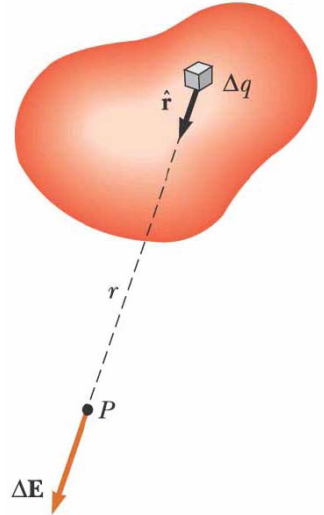
Om een elektrisch veld gecreëerd door een continue ladingsverdeling te evalueren volgen we meestal volgende procedure: eerst verdelen we de ladingsverdeling in infinitesimale stukjes met elk een kleine lading Δq . Daarna berekenen we voor elk stukje het elektrisch veld dat creëert in het punt P . Tenslotte evalueren we het totale elektrische veld in dat punt P door alle bijdragen te sommeren volgens het superpositieprincipe.

Het elektrisch veld in het punt P veroorzaakt door Δq is gelijk aan

$$\Delta \vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2} \hat{r} .$$

Als $q_i \rightarrow 0$ zal

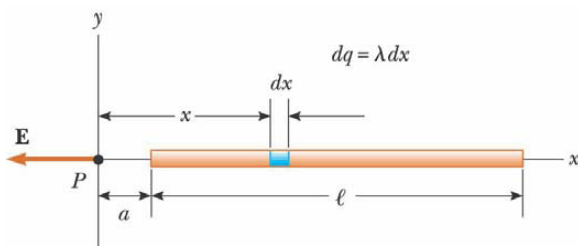
$$\vec{E} \approx k_e \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$



		volumeladingsverdeling	oppervlakteladingsverdeling	lineaire ladingsverdeling
Definitie ladingsdichtheid:	uniform	$\rho = Q/V$	$\sigma = Q/A$	$\lambda = Q/\ell$
	niet uniform	$\rho = dq/dV$	$\sigma = dq/dA$	$\lambda = dq/d\ell$
	eenheid	C/m^3	C/m^2	C/m

Voorbeeld: het elektrisch veld ten gevolge van een positief geladen staaf

Example 23.7, blz. 721



We nemen een uniform positief geladen staaf van lengte ℓ , en kiezen een willekeurig punt P in het verlengde van de staaf. Dit wil zeggen dat P niet in de staaf ligt, en ook niet op oneindig. Dankzij deze keuze voor P is er volledige symmetrie in de y - en in de z -richting.

Wanneer de uniforme ladingsverdeling per lengte-eenheid gelijk is aan λ , dan kunnen we veronderstellen dat dx de lengte is van een klein segmentje van de staaf en $dq = \lambda \cdot dx$ de lading op dat segmentje. Het elektrisch veld $d\vec{E}$ in het punt P veroorzaakt door dat segmentje wijst dan in de richting van de negatieve x -richting, met grootte

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda dx}{x^2} .$$

Omdat het elektrisch veld veroorzaakt door deze segmentjes steeds in dezelfde richting wijst, is het optellen hiervan eenvoudig. We bekommen dat

$$E = \int_a^{l+a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2} \quad \text{voor } a \leq x \leq l+a .$$

Wanneer we dit uitrekenen bekommen we dat

$$E = k_e \lambda \int_a^{l+a} \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right) = \frac{k_e Q}{a(l+a)} \quad \text{want } Q = \lambda \cdot \ell$$

Wanneer we de staaf bekijken vanop een grote afstand ten opzichte van de dimensie van de staaf ($a \gg \ell$), wordt het elektrisch veld gegeven door de uitdrukking van een puntlading: $E = \frac{k_e Q}{a^2}$.

Voorbeeld: het elektrisch veld van een uniform geladen ring

Example 23.8, blz. 721-722

Een ring met straal a draagt een uniforme verdeelde positieve lading Q . We plaatsen een punt P op de as door het centrum van de ring, op een afstand x van dat centrum. Uiteraard moeten we $x \neq 0$ nemen, want in het centrum zelf is $E = 0$ dus P zou niet willekeurig gekozen zijn. Dankzij de symmetrie valt de loodrechte component weg.

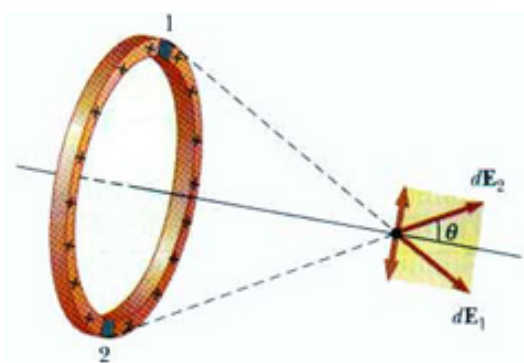
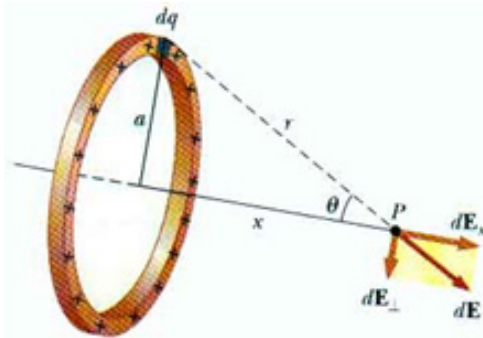
De grootte van het elektrisch veld dE in het punt P veroorzaakt door een fractie dq van de lading is gelijk aan

$$dE_x = dE \cos \theta = \left(k_e \frac{dq}{r^2} \right) \cdot \frac{x}{r} = \frac{k_e x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dq.$$

Omdat deze elektrische veldvectoren allemaal in de x -richting liggen, mogen we hun grootte gewoon optellen en bekomen we

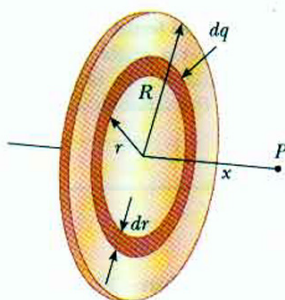
$$\begin{aligned} E &= \int dE_x = \int \frac{k_e x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dq \\ &= \frac{k_e x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dq = \frac{k_e x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} Q \end{aligned}$$

Wanneer we het elektrisch veld in een punt op oneindig berekenen, bekomen we dat voor $x \gg a$ geldt dat $E_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} E_x = 0$. Wanneer we een negatieve lading in het centrum van de ring plaatsen en een kleine uitwijking x geven (met $x \ll a$) geldt dat $E_x = \frac{k_e Q}{a^3} x$.



Voorbeeld: het elektrisch veld van een uniform geladen schijf

Example 23.9, blz. 722-723



Een schijf met straal R heeft een totale lading Q en een oppervlakteladingsdichtheid σ . We berekenen het elektrisch veld in een punt P op de as loodrecht op de schijf door het centrum van de schijf.

Het elektrisch veld van de ring met dikte dr en straal r in het punt P is gelijk aan

$$dE = \frac{k_e x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dq = \frac{k_e x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot (2\pi\sigma r dr).$$

Omdat deze elektrische veldvectoren allemaal in dezelfde richting liggen, mogen we hun grootte gewoon optellen en bekomen we

$$E = \int_0^R \frac{k_e x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot (2\pi\sigma r dr) = 2k_e\pi\sigma x \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 2k_e\pi\sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

Wanneer we het elektrisch veld bekijken in een punt zeer dicht tegen de schijf ($x \ll R$), geldt dat

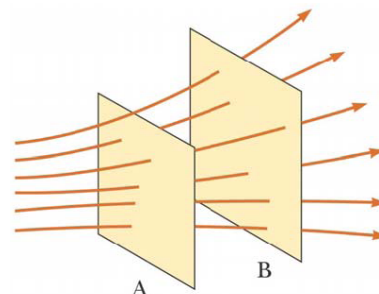
$1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \approx 1$, dus $E = 2k_e\pi\sigma$. Wanneer we het elektrisch veld bekijken in een punt op een grote afstand van de schijf ($x \gg R$), geldt dat $E = k_e \frac{Q}{r^2}$.

23.6 Elektrische veldlijnen

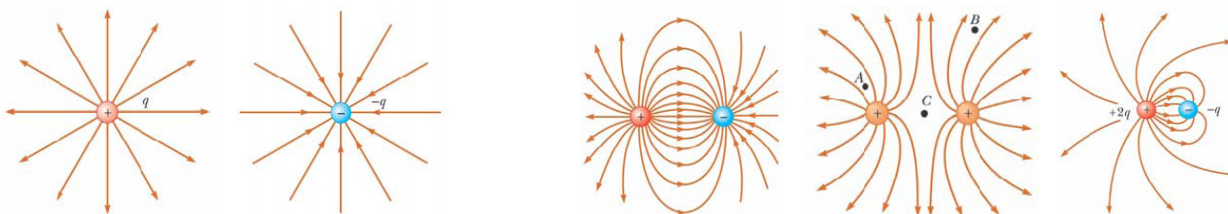
23.6 Electric Field Lines, blz. 723-725

We stellen het elektrisch veld grafisch voor met behulp van *elektrische veldlijnen*. De elektrische veldlijnen worden zo getekend dat ze in elk punt raken aan de elektrische veldvector in dat punt. Verder is het aantal veldlijnen per oppervlakte-eenheid evenredig met de elektrische veldsterkte in het beschouwde gebied.

Deze conventies zijn consistent met de definitie van \vec{E} van een puntlading via de wet van Coulomb: $\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r}$.



We laten veldlijnen altijd beginnen bij de positieve lading en eindigen bij de negatieve lading. Het aantal lijnen nabij de lading is evenredig met de lading. Veldlijnen kunnen elkaar nooit snijden.



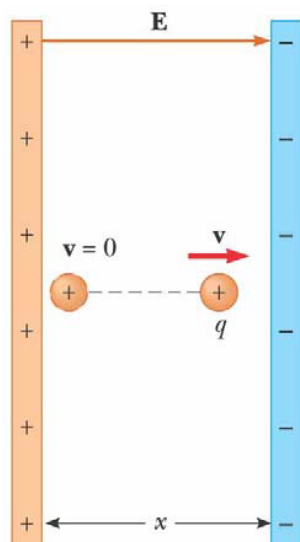
elektrische monopool

elektrische dipool

Experimenten vertellen ons dat veldlijnen altijd loodrecht op het oppervlak vertrekken en toekomen. Op scherpe punten is de dichtheid van de veldlijnen ook altijd groter dan elders. Verder stellen we vast dat tussen twee evenwijdige platen waartussen de afstand klein is in verhouding met de dimensie, de veldlijnen evenwijdig lopen. Verder blijkt ook dat een isolator de veldlijnen doorlaat, terwijl een geleider de veldlijnen tegenhoudt.

23.7 Beweging van een lading in een uniform elektrisch veld

23.7 Motion of Charged Particles in a Uniform Electric Field, blz. 725-728



Wanneer we een deeltje met een lading q en een massa m vanuit rust loslaten in een uniform elektrisch veld, zal het in beweging komen. We werken hier over de x -as. We weten al dat de versnelling constant zal zijn, want

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = m\vec{a} \quad \text{dus} \quad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} .$$

In het algemeen geldt voor een ééndimensionale beweging met een constante versnelling:

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{at^2}{2} \quad (\text{Positie in functie van de tijd})$$

$$v_f = v_i + at \quad (\text{Snelheid in functie van tijd})$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \quad (\text{Snelheid in functie van positie})$$

Wanneer we hierin de beginvoorwaarden $x_i = v_i = 0$ en de versnelling \vec{a} invullen, bekomen we

$$x_f = \frac{at^2}{2}, \quad v_f = \left(\frac{qE}{m}\right)t, \quad v_f^2 = \left(\frac{2qE}{m}\right)x_f.$$

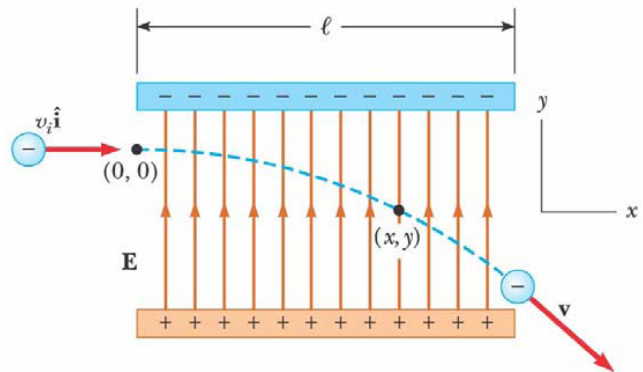
We stellen $\Delta x = x_f - x_i$, dan volgt dat de kinetische energie K gelijk is aan

$$K = \frac{mv_f^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2qE}{m}\right)\Delta x = qE\Delta x.$$

De arbeid verricht door de elektrische kracht is dan $F_e\Delta x = qE\Delta x$ en $W = \Delta K$.

We schieten een elektron met lading $-e$ horizontaal in een uniform elektrisch veld tussen twee horizontale platen met tegengestelde lading. We geven het elektron een beginsnelheid $v_i \hat{i}$ zodat $v_{xi} = v_i$ en $v_{yi} = 0$.

Omdat het elektrische veld in de positieve y -richting wijst, zal het elektron een versnelling in de negatieve y -richting krijgen, die gelijk is aan $\vec{a} = -\frac{eE}{m_e} \hat{j}$.

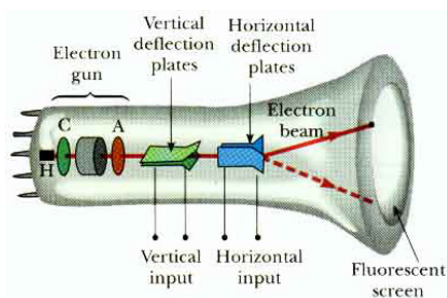


Omdat de versnelling constant is, mogen we de bewegingsvergelijkingen in twee dimensies gebruiken. Wanneer het elektron zich al een tijdje in het elektrisch veld bevindt, zal gelden dat

$$\begin{aligned} v_x &= v_i = \text{constant} & v_y &= a_y t = -\frac{eE}{m_e} t \\ x_f &= v_i t = \text{constant} & y_f &= \frac{a_y t^2}{2} = -\frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} t^2 \end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat $t = \frac{x_f}{v_i}$, zodat $y_f = \frac{1}{2} a_y \left(\frac{x_f}{v_i}\right)^2 = -c x_f^2$ met c een constante. Het elektron zal dus een parabolische baan beschrijven zolang het zich in het elektrisch veld bevindt. Wanneer het elektron het elektrisch veld verlaat, zal het verderbewegen in een rechte lijn in de richting van \vec{v} met een snelheid $v > v_i$. Hierbij veronderstellen we wel dat de platen geen hoekeffecten hebben: we nemen aan dat er geen elektrisch veld is buiten de platen.

Toepassing: de kathodestraalbuis (CRT)



De CRT wordt gebruikt om elektronische informatie zichtbaar te maken, bijvoorbeeld in een TV toestel, een computerscherm of een oscilloscoop. De CRT is een vacuüm buis waarin een elektronenstraal worden versneld en verdeeld onder de invloed van elektrische of magnetische velden.

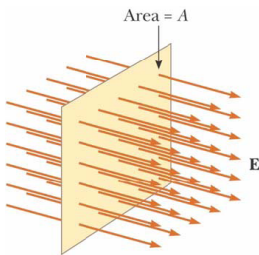
Hoofdstuk 24

De wet van Gauss

24 Gauss's Law, blz. 739-761

24.1 Elektrische flux

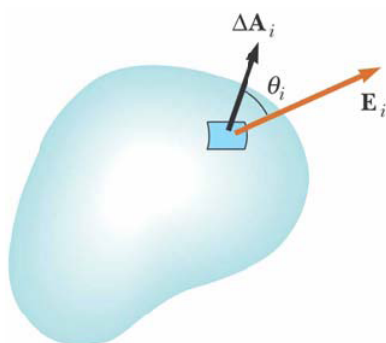
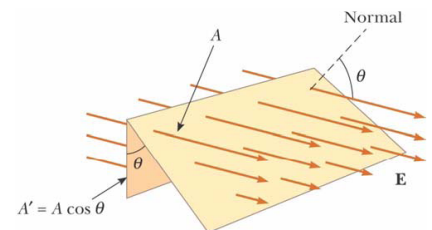
24.1 Electric Flux, blz. 740-743



We beschouwen een uniform elektrisch veld, zowel in grootte als in richting. We nemen een rechthoekig oppervlak dat loodrecht staat op de veldlijnen met een oppervlakte A . We weten al dat de dichtheid van veldlijnen evenredig is met E , en het aantal lijnen door A evenredig met $E \cdot A$.

We definiëren nu de *elektrische flux* Φ_E als volgt: $\phi_E = E \cdot A$. We zien dat $[\Phi_E] = ML^3/T^2Q$, en dat de elektrisch flux wordt uitgedrukt in $N \cdot m^2/C$.

Voor niet-loodrechte vlakken geldt $\Phi_E = E \cdot A' = E \cdot A \cos(\theta)$. Hieruit volgt dat de flux van een vlak evenwijdig met de veldlijnen gelijk is aan 0.



Om de elektrische flux te definiëren in een niet-uniform elektrisch veld, zullen we het totale oppervlak A onderverdelen in kleine stukjes ΔA . We definiëren een loodrechte vector $\Delta \vec{A}_i$, die per conventie van binnen naar buiten wijst bij een gesloten oppervlak. Er geldt dan $\Delta \Phi_E = E_i \Delta A_i \cos(\theta_i) = \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i$.

We definiëren dan de totale flux door het oppervlak A als volgt

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{A}_i = \int \vec{E} d\vec{A}$$

Elektrische flux door een gesloten oppervlak

De netto flux is evenredig met het netto aantal veldlijnen dat het oppervlak verlaat (dit is gelijk aan het aantal veldlijnen dat het oppervlak verlaat min het aantal veldlijnen dat het oppervlak binnenkomt).

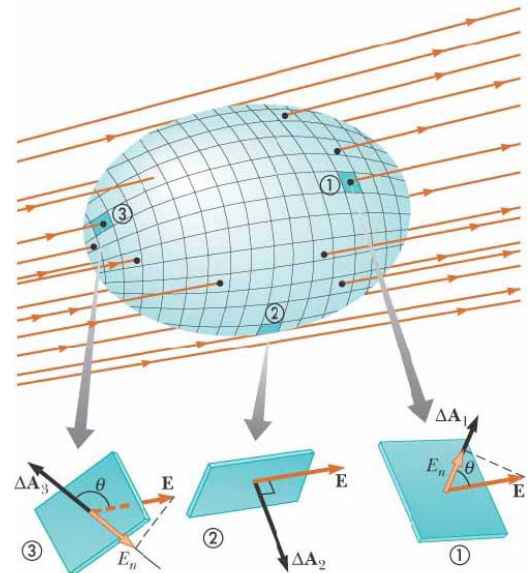
Bij een gesloten oppervlak geldt

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA,$$

waarbij E_n de component van het elektrisch veld is die loodrecht op het oppervlak staat.

De oppervlakte vectoren $\Delta\vec{A}_i$ staan per conventie altijd loodrecht op het oppervlak. Als de hoek θ tussen $\Delta\vec{A}_i$ en \vec{E} kleiner is dan 90° is de flux positief. Als $\theta = 0$ is de flux gelijk aan 0, en als $\theta > 90^\circ$ is de flux negatief.

Voor een gesloten oppervlak in een uniform elektrisch veld geldt dan $\Phi_E = 0$.



24.2 De wet van Gauss

24.2 Gauss's Law, blz. 743-745



De wet van Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

De netto flux van de elektrische veldlijnen door een gesloten oppervlak is gelijk aan de netto elektrische lading omsloten door het oppervlak gedeeld door ϵ_0 .

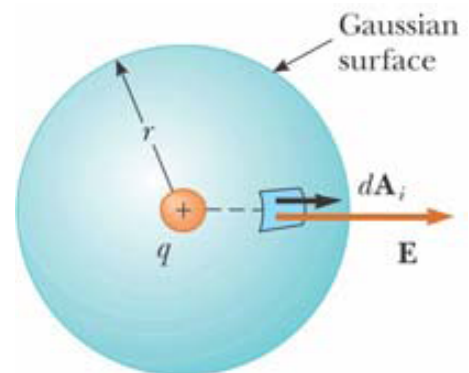
Elektrische flux door een sfeer ten gevolge van een puntlading in het centrum

Een sfeer met straal r heeft in het centrum een positieve puntlading $+q$. De grootte van het elektrisch veld is $E = \frac{k_e q}{r^2}$ en de veldlijnen wijzen naar buiten en staan loodrecht op het boloppervlak.

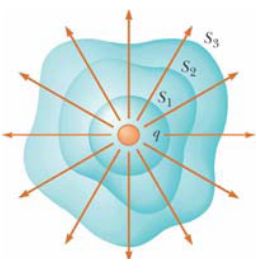
Omdat de elektrische veldvector en de oppervlaktevector nu dezelfde richting en zin hebben, geldt $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}_i = E \cdot \Delta A_i$, of nog:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA.$$

Er geldt dus $\Phi_E = k_e \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k_e q$. Omdat $\frac{1}{k_e} = 4\pi\epsilon_0$ geldt dus $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$.



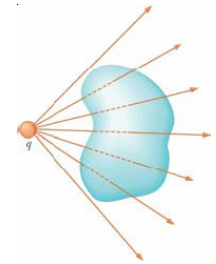
Elektrische flux door een willekeurig oppervlak ten gevolge van een puntlading in het centrum



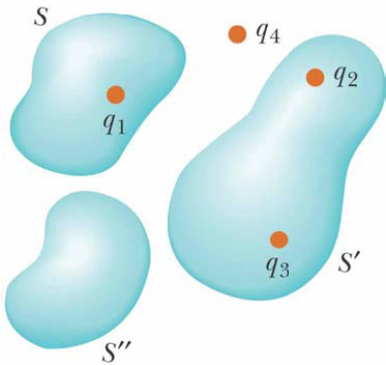
We weten dat $\Phi_{S_1} = \frac{q}{\epsilon_0}$ dus geldt $\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = \Phi_{S_3} = \frac{q}{\epsilon_0}$. De nettoflux door een willekeurig gesloten oppervlak dat een lading q omsluit, is steeds gelijk aan $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Verband tussen flux en lading buiten een gesloten oppervlak

De nettoflux door een willekeurig gesloten oppervlak dat geen netto lading omsluit, is steeds gelijk aan 0.



Superpositiebeginsel



Het superpositiebeginsel zegt dat $\vec{E}_{totaal} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$, zodat

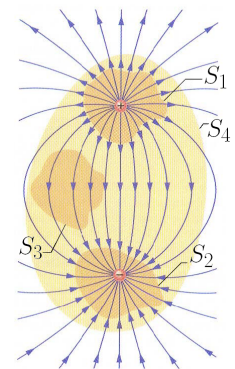
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) \cdot d\vec{A}$$

De flux doorheen de oppervlakken is gelijk aan

$$\Phi_S = \frac{q_1}{\epsilon_0} \quad \Phi_{S'} = \frac{q_2 + q_3}{\epsilon_0} \quad \Phi_{S''} = 0$$

Toepassing van de wet van Gauss op een dipool

- S_1 : positieve flux want alle veldlijnen lopen naar buiten
- S_2 : negatieve flux want alle veldlijnen lopen naar binnen
- S_3 : de flux is 0 want er lopen evenveel veldlijnen naar binnen als naar buiten
- S_4 : de flux is 0 want de nettolading is 0 dus er lopen evenveel veldlijnen naar binnen als naar buiten



24.3 Toepassing: elektrisch veld ten gevolge van een ladingsverdeling

24.3 Application of Gauss's Law to Various Charge Distributions, blz. 746-750

Kies een optimaal gesloten oppervlak (=Gaussoppervlak) dat bij voorkeur enige symmetrie vertoont. Zorg ervoor dat het elektrisch veld constant is op het oppervlak, en bij voorkeur loodrecht op het oppervlak, evenwijdig met het oppervlak of 0 op het oppervlak.

Voorbeeld: elektrisch veld van een puntlading q

Example 24.4, blz. 746

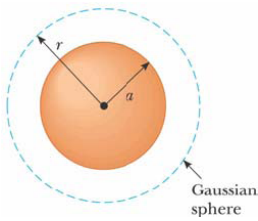
We berekenen het elektrisch veld in een punt op afstand r van de puntlading q . Als Gaussoppervlak nemen we een sfeer met straal r en middelpunt q . De wet van Gauss vertelt ons enerzijds dat $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$, en anderszijds dat $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$. Omdat \vec{E} en \vec{A} over het ganze oppervlak evenwijdig zijn, E constant is over het oppervlak, en de oppervlakte van een bol met straal r gelijk is aan $4\pi r^2$, geldt

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E \cdot 4\pi r^2$$

Door deze twee uitdrukkingen voor Φ_E gelijk te stellen, bekommen we dat $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$.

Voorbeeld: een sferisch symmetrische ladingsdistributie

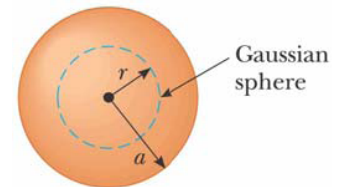
Example 24.5, blz. 747



Een bol met straal a heeft een uniforme volume-ladingsverdeling ρ en een totale positieve lading Q .

Wanneer we het elektrische veld op een afstand $r > a$ van het middelpunt van de bol willen berekenen, dan kunnen we de redenering van het vorig voorbeeld volgen en bekomen we dat $E = k_e \frac{q}{\epsilon_0}$.

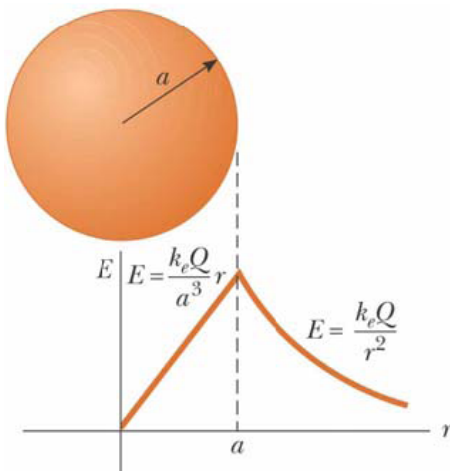
Wanneer we het elektrische veld op een afstand $r < a$ van het middelpunt van de bol willen berekenen, moeten we analoog te werk gaan. Als Gaussoppervlak nemen we een sfeer met als middelpunt het middelpunt van de bol en met straal r .



Omdat \vec{E} en \vec{A} opnieuw over het ganse oppervlak evenwijdig zijn, E constant is op het oppervlak, en de oppervlakte van een bol met straal r gelijk is aan $4\pi r^2$, geldt

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E \cdot 4\pi r^2$$

We weten ook dat $\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$, met $q_{in} = \rho \cdot V(r) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{a^3}$.



Wanneer we deze twee uitdrukkingen voor Φ_E gelijkstellen en q_{in} invullen, bekomen we dat

$$E = \frac{Qr^3}{a^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

Hieruit volgt dus dat

$$E_{r=0} = 0 \quad \text{en} \quad E_{r=a}^{binnen} = E_{r=a}^{buiten} = k_e \frac{Q}{a^2}$$

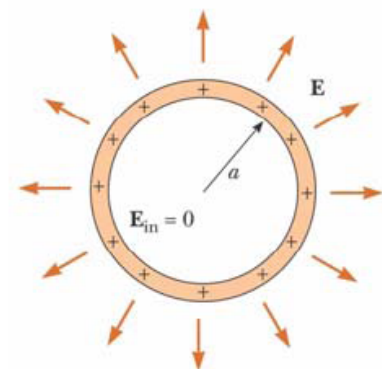
We kunnen deze resultaten bundelen in een grafiek. We zien dan dat E in functie van r lineair is voor $r < a$ en omgekeerd evenredig met r^2 als $r > a$.

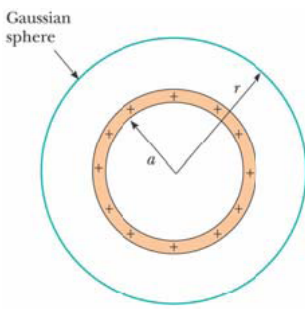
Voorbeeld: elektrisch veld ten gevolge van een dunne geladen sfeer

Example 24.6, blz. 748

We nemen een dunne sfeer met straal a en een totale lading Q die uniform verdeeld is over het oppervlak.

Om het elektrische veld in een punt buiten de sfeer te berekenen, kiezen we een concentrische sfeer met straal $r > a$ als Gaussoppervlak.





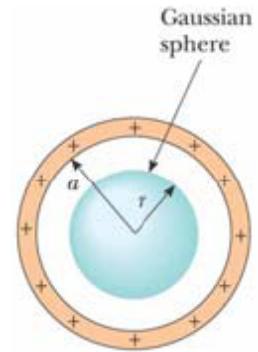
Omdat \vec{E} en \vec{A} over het ganze oppervlak evenwijdig zijn, E constant is op het oppervlak, en de oppervlakte van een sfeer met straal r gelijk is aan $4\pi r^2$, geldt net zoals bij de vorige voorbeelden dat

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E \cdot dA = E \oint dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

dus $E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{q_{in}}{r^2}$. Dit is dezelfde uitdrukking als bij een puntlading, een gevolg van de symmetrie en niet van de afstand.

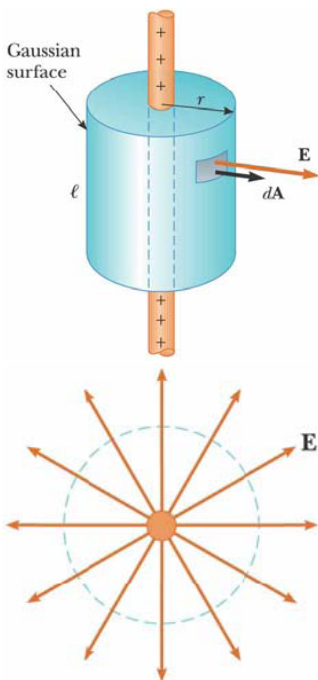
Om het elektrisch veld in een punt binnen de sfeer te berekenen, kiezen we een concentrische sfeer met straal $r < a$ als Gaussoppervlak. Omdat er binnen dit oppervlak geen lading is, is de nettoflux gelijk aan 0 dus $E = 0$. Dit is het geval voor alle mogelijke Gaussoppervlakken binnen de sfeer.

We kunnen dit ook op een alternatieve (moeilijkere) manier berekenen, namelijk met de wet van Coulomb: $\vec{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$.



Voorbeeld: elektrisch veld ten gevolge van een cilindrische symmetrische ladingsdistributie

Example 24.7, blz. 748-749



We bekijken het elektrisch veld van een oneindig lange cilinder met een positieve ladingsdichtheid λ . We kiezen een cilindrisch Gaussoppervlak met straal r en lengte l . Er geldt dan

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{bovenvlak}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{ondervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{mantel}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Bij het boven- en ondervlak staat \vec{E} loodrecht op \vec{A} , dus hun scalair product is gelijk aan 0. Bij de mantel zijn \vec{E} en \vec{A} evenwijdig, dus we mogen gewoon hun groottes vermenigvuldigen. Omdat de oppervlakte van de mantel gelijk is aan $2\pi r \cdot l$, bekommen we dan dat

$$\Phi_E = \int_{\text{mantel}} E \cdot dA = E \int_{\text{mantel}} dA = E \cdot 2\pi r l$$

We weten ook dat $\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$.

Door deze twee uitdrukkingen gelijk te stellen bekommen we dat

$$E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi r l} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} = 2 k_e \frac{\lambda}{r}$$

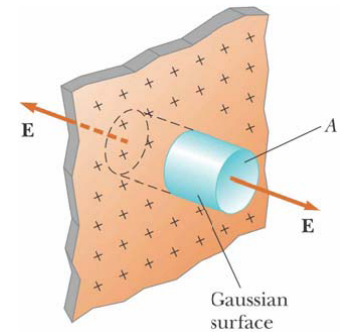
We merken op dat E evenredig is met $\frac{1}{r}$, terwijl een puntlading evenredig is met $\frac{1}{r^2}$. Ook voor grote afstanden wordt E niet evenredig met $\frac{1}{r^2}$, en de reden daarvoor is dat ons oppervlak eigenlijk dimensie oneindig heeft. Dit wel zeggen dat we nooit zover weg kunnen gaan staan dat onze lading op een puntlading gaat lijken.

Als de cilinder niet oneindig lang zou zijn, mogen we de wet van Gauss niet meer gebruiken omdat we de symmetrie verliezen. Enerzijds is het elektrisch veld niet constant over het oppervlak. Anderzijds is \vec{E} ook niet langer altijd loodrecht of evenwijdig met het oppervlak. Voor een punt dicht bij een eindige cilinder en ver van de uiteinden is de berekende E een goede benadering.

Voorbeeld: elektrisch veld ten gevolge van een oneindig vlak met homogene oppervlakte-ladingsdichtheid

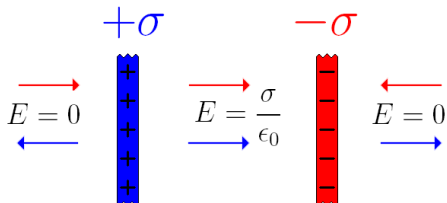
Example 24.8, blz. 749-750

We hebben een oneindig vlak met homogene oppervlakte-ladingsdichtheid σ . Als Gaussoppervlak nemen we een kleine cilinder waarvan de as loodrecht staat op het vlak, en met zij-oppervlakken A die even ver van het oppervlak liggen. Op de mantel staan \vec{E} en de oppervlakte-vector dan loodrecht op elkaar, dus hun scalair product is 0. Op de zijvlakken zijn deze evenwijdig, dus mogen we hun groottes vermenigvuldigen.



We weten dat $\Phi_E = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$, of nog: $\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = 2 \cdot \int_{zijvlak} E dA = 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$.

Hieruit volgt dat $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Merk op dat deze uitdrukking onafhankelijk is van de afstand waarop A van het vlak ligt.



Wanneer we twee oneindige vlakken met homogene oppervlakte-ladingsdichtheid $+\sigma$ en $-\sigma$ evenwijdig naast elkaar plaatsen, zal het elektrisch veld tussen deze twee vlakken versterkt worden, en buiten de vlakken zal het elektrisch veld 0 zijn.

24.4 Geleiders in elektrostatich evenwicht

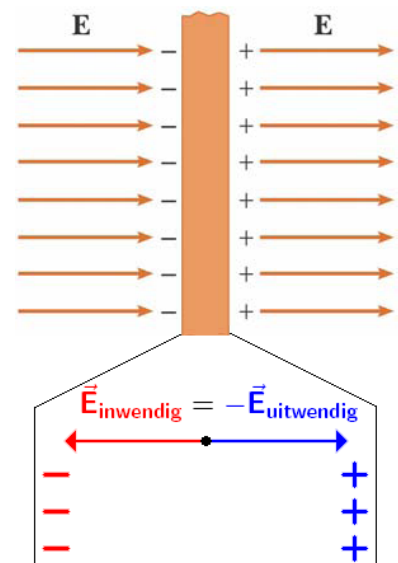
24.4 Conductors in Electrostatic Equilibrium, blz. 750-752

Een geleider is in *elektrostatich evenwicht* [electrostatic equilibrium] wanneer de ladingen niet meer bewegen. Zo'n geleider heeft enkele eigenschappen, die we verder gaan bespreken.

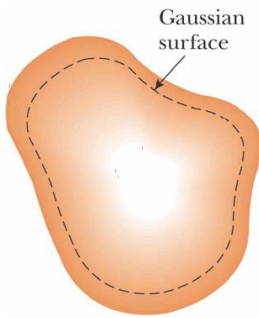
Eigenschap: het elektrisch veld in de geleider is overal gelijk aan 0

Indien in de geleider een elektrisch veld zou heersen, heerst er een kracht op de vrije ladingen. De vrije ladingen zullen dan in beweging komen, en er is niet langer elektrostatiche evenwicht.

We willen nu nog weten waarom het elektrisch veld in de geleider overal gelijk is aan 0. Voor er een uitwendig elektrisch veld wordt aangelegd, zijn de vrije elektronen uniform verdeeld in de geleider. Wanneer het elektrisch veld wordt aangelegd, gaan de vrije elektronen zich groeperen aan één kant van de geleider, waardoor de geleider aan die kant negatief geladen wordt. Aan de andere kant resulteert het tekort aan elektronen in een positieve lading, waardoor in de geleider opnieuw een elektrisch veld ontstaat.



De beweging van de elektronen heeft als gevolg dat de oppervlakte-ladingsdichtheid wijzigt. De elektronenstroom blijft duren tot de grootte van het intern elektrisch veld gelijk is aan de grootte van het extern elektrisch veld. We kunnen dus stellen dat de geleider bijna onmiddellijk ($10^{-16}s$) het extern aangelegd elektrisch veld zal compenseren door een inwendig elektrisch veld.

Eigenschap: de vrije ladingen bevinden zich aan het oppervlak

We weten al dat het elektrisch veld in de geleider gelijk is aan 0, dus door elk willekeurig Gaussoppervlak is de flux 0. Als de flux gelijk is aan 0, dan is er geen netto lading binnen het oppervlak. Omdat we dit Gaussoppervlak tot willekeurig dicht tegen de rand van het oppervlak kunnen tekenen, moet alle nettolading zich op de rand van het oppervlak bevinden. De wet van Gauss zegt wel niks over hoe deze lading over de rand van het oppervlak verspreid is.

Eigenschap: het elektrisch veld net buiten de geleider staat loodrecht op het oppervlak en is gelijk aan σ/ϵ_0 met σ gelijk aan de oppervlakte-ladingsdichtheid

Indien de elektrische veldvector een component zou hebben die niet-loodrecht op het oppervlak staat, zouden de vrije ladingen in beweging komen en is de geleider dus niet langer in elektrostatisch evenwicht. De elektrische veldvector moet dus net buiten de geleider loodrecht op het oppervlak staan.

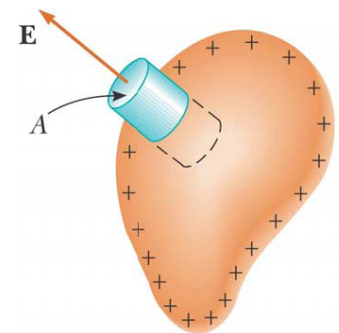
Om de grootte van het elektrisch veld te berekenen, tekenen we een kleine cilinder doorheen ons oppervlak waarbij de uiteinden parallel liggen met het oppervlak. Een gedeelte van de cilinder ligt binnen het oppervlak, een ander gedeelte ligt buiten het oppervlak. Omdat \vec{E} en \vec{A} op de mantel van de cilinder loodrecht op elkaar staan, is de flux daar gelijk aan 0. Het zijvlak binnenin het oppervlak heeft ook geen bijdrage tot de totale flux, omdat daar $\vec{E} = 0$ geldt.

De totale flux van het Gaussoppervlak wordt dus gegeven door de flux van het zijvlak buiten het oppervlak, waar \vec{E} evenwijdig is met \vec{A} .

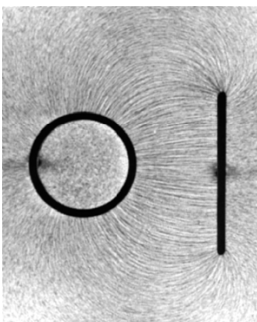
Als we veronderstellen dat het zijvlak een oppervlakte A heeft, dan geldt

$$\Phi_E = \oint E dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

waarbij we gebruikt hebben dat $q_{in} = \sigma A$. Er geldt dus $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



In een voorbeeld in hoofdstuk 24.3 hebben we berekend dat voor een isolator geldt dat $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Dit verschil is een gevolg van het feit dat bij een geleider maar aan één kant van de cilinder ladingen kunnen zitten, en dat bij een isolator aan twee kanten van de cilinder ladingen kunnen zitten. De lading is dus verspreid over twee kanten, en daarom is het elektrisch veld maar half zo groot bij een isolator als bij een geleider.

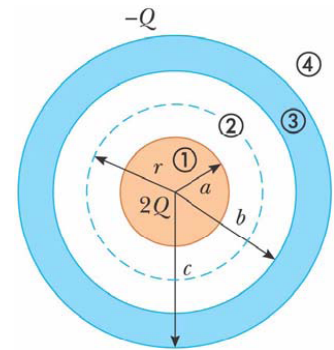
Eigenschap: bij onregelmatige oppervlakken is de oppervlakte-ladingsdichtheid het grootst op plaatsen waar de kromtestraal van het oppervlak het kleinst is.

Deze eigenschap wordt verklaard nadat we de elektrische potentiaal gedefinieerd hebben.

Voorbeeld: een geladen bol in een geladen schil

Example 24.10, blz. 752

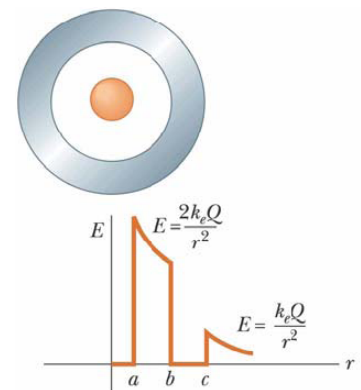
We hebben een geladen bol met straal a en een lading $2Q$, en een hiermee concentrische geladen schil met binnenstraal b en buitenstraal c en een lading $-Q$. We willen het elektrische veld berekenen in de bol (1), tussen de bol en de schil (2), in de schil (3) en buiten de schil (4). Omdat de symmetrie in dit systeem overheerst, construeren we als Gaussoppervlak een concentrische sfeer met straal r .



$r < a$ Omdat de geleider in elektrostatisch evenwicht is, geldt dat $q_{in} = 0$. De wet van Gauss vertelt ons dan dat $E_1 = 0$.

$a < r < b$ We weten dat $q_{in} = 2Q$. Omwille van de symmetrie moeten de elektrische veldlijnen radiëel zijn en constant in grootte op het Gaussoppervlak. Dit is volledig analoog aan het berekenen van het elektrisch veld ten gevolge van een puntlading, dus er geldt $E_2 \cdot A = E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{2Q}{\epsilon_0}$ waaruit volgt dat $E_2 = \frac{2k_e Q}{r^2}$.

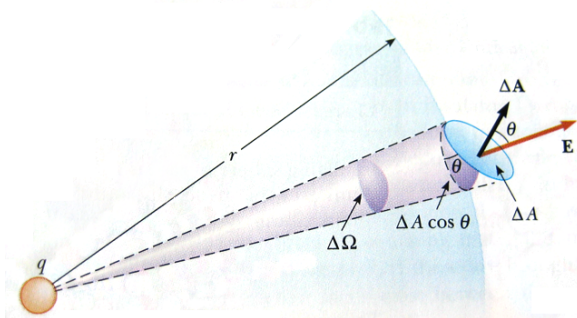
$b < r < c$ We weten dat het elektrisch veld nul moet zijn binnen een geleider in elektrostatisch evenwicht, dus geldt $E_3 = 0$. Wanneer we een Gaussoppervlak tekenen met straal r (dat dus in de geladen schil ligt) en we weten dat $E_3 = 0$, dan weten we ook dat de nettolading moet gelijk zijn aan 0. Concreet wil dit zeggen dat de lading aan de binnenkant van de schil gelijk moet zijn aan $-2Q$ om de lading $+2Q$ van de bol op te heffen. Hieruit volgt dus ook dat de lading aan de buitenkant van de schil dan gelijk moet zijn aan $+Q$, om dan op een totale lading van $-Q$ uit te komen.



$c < r$ We weten dat de nettolading buiten de bol gelijk is aan $q_{in} = (+2Q) + (-Q) = +Q$. Wanneer we hierop de wet van Gauss toepassen bekomen we dat $E_4 = \frac{k_e Q}{r^2}$.

24.5 Formele afleiding van de wet van Gauss

24.5 Formal Derivation of Gauss's Law, blz. 752-753



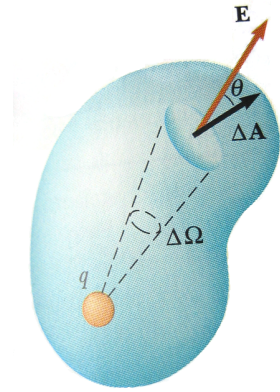
We kennen de hoek θ , die uitgedrukt wordt in radialen, en die gedefinieerd is als volgt: $\Delta\theta \equiv \frac{\Delta l}{r}$. We definiëren nu analoog de ruimtehoek Ω : $\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A}{r^2}$. De ruimtehoek heeft als eenheid *sterradianen*.

Voor een volledige bol, maar ook voor elk ander gesloten oppervlak, zal de ruimtehoek 4π bedragen. Immers, de oppervlakte van een volledige bol is $4\pi r^2$, dus $\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$.

We beschouwen nu een puntlading q waarrond een gesloten oppervlak ligt. De totale elektrische flux van dit oppervlak kunnen we dan bekomen door $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$ te evalueren voor elk stukje oppervlak ΔA en dan te sommeren. De flux door één stukje is gelijk aan

$$\Delta\Phi_E = \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = (E \cos \theta) \Delta A = k_e q \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$$

waarbij r de afstand is van ΔA tot q , θ de hoek tussen het elektrisch veld \vec{E} en de oppervlaktevector $\Delta\vec{A}$, en $E = \frac{k_e q}{r^2}$ voor een puntlading q .



Om nu de totale flux te bekomen moeten we sommeren over al deze kleine stukjes ΔA . Hierbij weten we dat $\Delta\Omega = \frac{\Delta A \cos \theta}{r^2}$. Omdat de ruimtehoek van een gesloten oppervlak altijd gelijk is aan 4π , geldt dus

$$\Phi_E = k_e q \oint \frac{dA \cos \theta}{r^2} = k_e q \oint d\Omega = k_e q 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

Hoofdstuk 25

Elektrische potentiaal

25 Electric Potential, blz. 762-794

HERHALING: Een kracht is *conservatief* wanneer de arbeid verricht door deze kracht bij het verplaatsen van een deeltje tussen twee punten onafhankelijk is van het gevolgde pad.

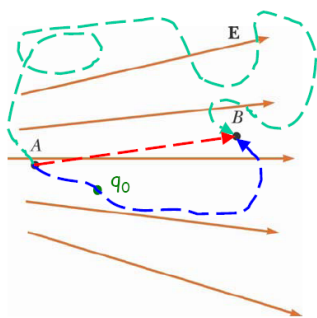
Wanneer een conservatieve kracht \vec{F} werkt op een deeltje dat verplaatst wordt over de x -as van x_i naar x_f , dan is de verandering in *potentiële energie* gelijk aan

$$\Delta U = U_f - U_i = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx .$$

We hebben op die manier al de *gravitationele potentiële energie* $U_g \equiv mgy$ en de *elastische potentiële energie* $U_s \equiv \frac{kx^2}{2}$ gedefinieerd.

25.1 Potentiaalverschil en elektrische potentiaal

25.1 Potential Difference and Electric Potential, blz. 763-765



De kracht $\vec{F}_e = q_0 \cdot \vec{E}$ op een testlading q_0 in een elektrisch veld \vec{E} is conservatief omdat de kracht tussen ladingen, die beschreven wordt door de wet van Coulomb, conservatief is.

Nemen we een willekeurige verplaatsing $d\vec{s}$, dan is de arbeid verricht door de kracht (arbeid = kracht \cdot verplaatsing) gelijk aan $W = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$. De potentiële energie van het systeem wordt dan gegeven door

$$\Delta U = \int_A^B -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} . \quad (25.1)$$

Omdat de kracht $q_0 \vec{E}$ conservatief is, zal deze *lijntegraal* niet afhangen van het gevolgde pad tussen A en B . Het minteken moet er staan omdat de potentiële energie zal verminderen als we verplaatsen in de richting van de kracht. De eenheid van U is *Joule* $J = Nm = m^2/s^2$.

De *potentiële energie per testlading* is enkel afhankelijk van de bron, en is gelijk aan

$$\frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

We definiëren deze grootheid als de *elektrische potentiaal* V [*electric potential*] met $V = \frac{U}{q_0}$. Omdat de potentiële energie een scalaire grootheid is, zal de elektrische potentiaal dat ook zijn.

We definiëren ook het *potentiaalverschil* ΔV [*potential difference*], een scalaire representatie van het elektrisch veld:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} . \tag{25.2}$$

De reden hiervoor is omdat alleen potentiaalverschillen betekenisvol zijn. Meestal maken we een conventie over de plaats waar we de elektrische potentiaal 0 stellen, dit kan bijvoorbeeld een punt zijn met speciale symmetrie-eigenschappen of een punt op oneindig. Omdat potentiaal een meting is van potentiële energie per ladingseenheid, is de eenheid van zowel elektrische potentiaal als van potentiaalverschil $J/C = V$ (Volt). De eenheid van het elektrische veld (N/C) kan nu dus ook anders uitgedrukt worden:

$$1V \equiv 1 \frac{J}{C} \qquad 1 \frac{N}{C} = 1 \frac{V}{m}$$

We kunnen het elektrisch veld dus ook interpreteren als een maat voor verandering van de elektrische potentiaal afhankelijk van de positie.

Een alternatieve energie-eenheid, die vaak gebruikt wordt in de atoom- en nucleaire fysica, is de *elektronvolt*. Deze drukt de energieverandering uit wanneer een lading $q = e$ beweegt door een potentiaalverschil van 1 Volt. Omdat $1V = 1J/C$ en omdat de fundamentele lading e gelijk is aan $1,6 \cdot 10^{-19}C$, staat de elektronVolt in relatie met de Joule als volgt: $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19}CV = 1,6 \cdot 10^{-19}J$.

Het is belangrijk om het verschil te zien tussen een potentiaalverschil en een verschil in potentiële energie. Het potentiaalverschil tussen A en B hangt alleen af van de bron-ladingsverdeling (waarbij we de punten A en B beschouwen zonder de aanwezigheid van een testlading). Een verschil in potentiële energie is er alleen wanneer een testlading wordt verplaatst tussen twee punten.

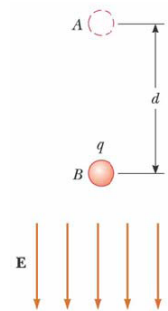
De arbeid verricht door een externe kracht om een lading q door een elektrisch veld te bewegen met constante snelheid is $W = \Delta U = q \Delta V$.

25.2 Potentiaalverschil in een uniform elektrisch veld

25.2 Potential Differences in a Uniform Electric Field, blz. 765-768

Hoewel de formules (25.1) en (25.2) geldig zijn voor uniforme en niet-uniforme elektrische velden, kunnen we ze vereenvoudigen voor uniforme velden. We beschouwen daarvoor een uniform elektrisch veld in de richting van de negatieve y -as. We berekenen dan het potentiaalverschil tussen twee punten A en B op een afstand $|\vec{s}| = d$ van elkaar, waarbij \vec{s} parallel is met de veldlijnen. Dan volgt uit (25.2) dat

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B (E \cos 0^\circ) ds = - \int_A^B E ds .$$



Omdat E constant is, kunnen we dit vereenvoudigen tot $\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed$.

Het minteken geeft aan dat de elektrische potentiaal in B lager is dan in A , dus $V_B < V_A$. Elektrische veldlijnen wijzen altijd in de richting van afnemende potentiaal.



Als we veronderstellen dat een testlading q_0 beweegt van A naar B , dan kunnen we de verandering in potentiële energie als volgt berekenen:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 Ed .$$

Uit dit resultaat blijkt dat als q_0 positief is, ΔU negatief zal zijn. We concluderen dat een systeem bestaande uit een positieve (negatieve) lading en een elektrisch veld potentiële energie verliest (wint) wanneer de lading beweegt in de richting van het veld. Omdat er behoud van energie moet zijn, zal de kinetische energie toenemen (afnemen).



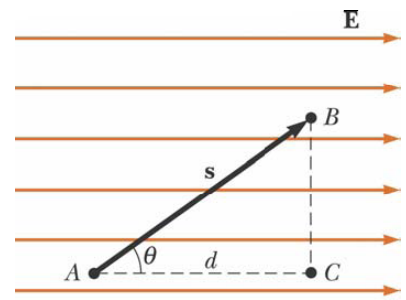
Wanneer de verplaatsingsvector \vec{s} niet evenwijdig is met het elektrisch veld (dat nog steeds constant is), geldt

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \int_A^B d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s}.$$

Het verschil in potentiële energie van het systeem is dan

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{s}.$$

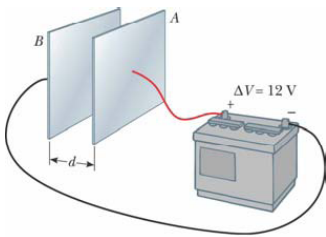
Hieruit kunnen we concluderen dat alle punten in een vlak loodrecht op de richting van een uniform elektrisch veld op dezelfde elektrische potentiaal zitten. Een oppervlak bestaande uit punten met dezelfde elektrische potentiaal noemen we een *equipotentiaaloppervlak*.



Voorbeeld: elektrisch veld tussen twee platen met tegengestelde lading

Example 25.1, blz. 767

Een batterij produceert een bepaald potentiaalverschil ΔV tussen twee geleiders. We sluiten een 12-V batterij aan op twee parallelle geleidende platen, met een afstand $d = 0.3 \text{ cm}$ tussen de platen. We veronderstellen dat het veld tussen de platen uniform is. Het elektrische veld loopt dan van de positieve plaat (A) naar de negatieve plaat (B), waarbij de positieve plaat op een hogere potentiaal zit dan de negatieve plaat. Het potentiaalverschil tussen de platen moet gelijk zijn aan het potentiaalverschil tussen de pinnetjes van de batterij. Hieruit volgt dat



$$E = \frac{|\Delta V|}{d} = \frac{12 \text{ V}}{0.30 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 4.0 \cdot 10^3 \text{ V/m}.$$

Voorbeeld: beweging van een proton in een uniform elektrisch veld

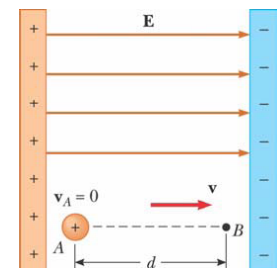
Een proton wordt vanuit rust losgelaten in een uniform elektrisch veld met grootte $8.0 \cdot 10^4 \text{ V/m}$. Het proton ondergaat een verplaatsing van 0.50 m in de richting van \vec{E} . Het potentiaalverschil tussen A en B is dan gelijk aan

$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \cdot 10^4 \text{ V/m})(0.50 \text{ m}) = -4.0 \cdot 10^4 \text{ V}.$$

Het verschil in potentiële energie wordt gegeven door

$$\Delta U = q_0 \Delta V = e \Delta V = (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(-4.0 \cdot 10^4 \text{ V}) = -6.4 \cdot 10^{-15} \text{ J}.$$

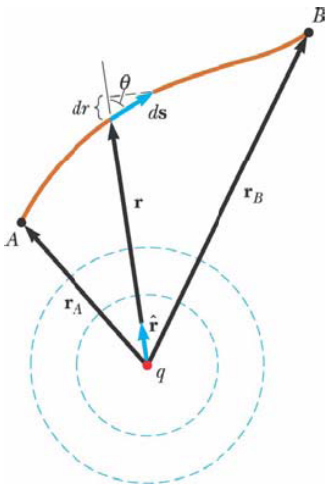
Het proton zal dus elektrische potentiële energie verliezen maar het zal ook versnellen en dus kinetische energie winnen. We kunnen nu nog de snelheid van het proton berekenen na zijn verplaatsing. Daarvoor gebruiken we het principe van behoud van mechanische energie:



$$\begin{aligned} \Delta K + \Delta U &= 0 \\ \left(\frac{mv^2}{2} - 0\right) + e\Delta V &= 0 \\ v &= \sqrt{\frac{-2e\Delta V}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{-2(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(-4.0 \cdot 10^4 \text{ V})}{1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \\ &= 2.8 \cdot 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

25.3 Elektrische potentiaal en potentiële energie bij puntladingen

25.3 Electric Potential and Potential Energy Due to Point Charges, blz. 768-771



Een geïsoleerde positieve puntlading q produceert een radiaal elektrisch veld rondom zich. Om de elektrische potentiaal op een punt op afstand r van q te vinden, beginnen we met de algemene uitdrukking voor potentiaalverschil:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

waarbij A en B twee willekeurige punten zijn. Op eender welk punt in de ruimte zal het elektrische veld van de puntlading gelijk zijn aan $\vec{E} = k_e q \hat{r} / r^2$, waarbij \hat{r} de eenheidsvector in de richting van het punt is. Dan geldt

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}.$$

Omdat $|\hat{r}| = 1$ geldt $\hat{r} \cdot d\vec{s} = ds \cos \theta$ waarbij θ de hoek is tussen \hat{r} en \vec{s} . Omdat $ds \cos \theta$ gelijk is aan de projectie van $d\vec{s}$ op \vec{r} geldt $ds \cos \theta = dr$. We kunnen dit als volgt interpreteren: elke verplaatsing $d\vec{s}$ van A naar B produceert een verandering dr in de grootte van \vec{r} . We vinden dus dat $\vec{E} \cdot d\vec{s} = (k_e q / r^2) dr$. De uitdrukking voor potentiaalverschil wordt dan

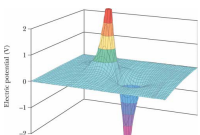
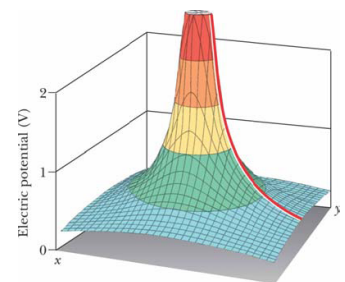
$$V_B - V_A = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = k_e q \left. \frac{1}{r} \right|_{r_A}^{r_B} = k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right].$$

Deze vergelijking toont ons dat $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ en dus ook $W = q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$ onafhankelijk is van het gevolgde pad tussen A en B . De elektrische kracht is dus conservatief. We definiëren een veld dat gerelateerd is met een conservatieve kracht een *conservatief veld*.

We zien ook dat het potentiaalverschil tussen A en B alleen afhangt van de radiale coördinaten r_A en r_B . We kiezen de elektrische potentiaal nu 0 voor $r_A = \infty$. De elektrische potentiaal gecreëerd door een puntlading op een afstand r van de lading is dan gelijk aan

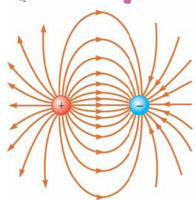
$$V = k_e \frac{q}{r}. \tag{25.3}$$

De figuur hiernaast toont een grafiek waarbij de elektrische potentiaal is uitgezet op de verticale as. We kunnen dit vergelijken met een 'potentiiaalberg': een negatieve lading klimt erop (want deze wordt aangetrokken tot de positieve lading in het centrum), een positieve lading rolt eraf (want deze wordt afgestoten door de positieve lading in het centrum). Voor een negatieve lading zullen we een put krijgen.



Wanneer we de elektrische potentiaal in een punt zoeken ten gevolge van twee of meer puntladingen mogen we het superpositie principe gebruiken. Dan geldt

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}.$$



We zien een voorbeeld daarvan bij een elektrische dipool. We zien dat beweging volgens een equipotentiallijn (dus loodrecht op het elektrisch veld) geen energieverandering teweeg brengt. Bij beweging op een equipotentiallijn (dus volgens het elektrisch veld) is er wel energieverandering.

We beschouwen nu de potentiële energie van een systeem met twee geladen deeltjes. V_2 is de elektrische potentiaal in een punt P ten gevolge van de lading q_2 . De arbeid die een externe kracht moet doen om een tweede lading q_1 van oneindig naar P moet brengen zonder versnelling is dan gelijk aan $q_1 V_2$. Deze arbeid representeert een verplaatsing van energie in het systeem en deze energie zien we verschijnen in de potentiële energie U . Als q_1 en q_2 op een afstand r_{12} van elkaar liggen geldt dus

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} .$$

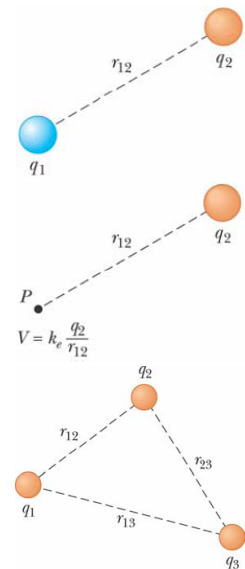
Als daarna de lading q_1 verwijderd wordt van het punt P kunnen we de potentiaal in het punt P ten gevolge van de lading q_2 als volgt definiëren:

$$V = \frac{U}{q_1} = \frac{k_e q_2}{r_{12}} .$$

Als het systeem uit meer dan twee geladen deeltjes bestaat, kunnen we U berekenen voor elk paar van twee geladen deeltjes en deze dan algebraïsch optellen (U is immers scalair, niet vectorieel):

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) .$$

We kunnen dit fysisch als volgt interpreteren: we veronderstellen dat q_1 vast zit op zijn positie, en dat q_2 en q_3 op oneindig zitten. De arbeid die een externe kracht moet leveren om q_2 van oneindig naar zijn positie bij q_1 te brengen is gelijk aan $k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$, de eerste term van de som. De tweede en de derde term staan voor de arbeid die een externe kracht moet leveren om q_3 van oneindig naar zijn positie bij q_1 en q_2 te brengen.



25.4 Elektrisch veld afleiden uit de elektrische potentiaal

25.4 Obtaining the Value of the Electric Field from the Electric Potential, blz. 772-774

We weten dat het elektrische veld \vec{E} en de elektrische potentiaal V als volgt zijn gerelateerd:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Hieruit volgt dat we het potentiaalverschil dV tussen twee punten die op een afstand ds van elkaar liggen kunnen uitdrukken als volgt:

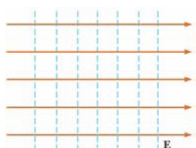
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Als het elektrische veld alleen een component E_x heeft, dan geldt $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x dx$. Daaruit volgt dat

$$E_x = \frac{dV}{dx} . \quad (25.4)$$

De x -component van het elektrische veld is dus de negatieve afgeleide van de elektrische potentiaal naar x . We kunnen dus experimenteel de potentiaal V gaan opmeten in functie van de afstand x om het elektrische veld te bepalen. Dezelfde redenering geldt natuurlijk ook voor y en z .

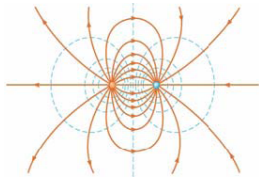
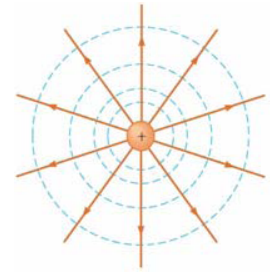
Als een testlading een verplaatsing $d\vec{s}$ ondergaat over een equipotentiaaloppervlak geldt $dV = 0$ dus $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Hieruit volgt dat \vec{E} loodrecht moet staan op $d\vec{s}$. Dit bewijst dat de equipotentiaaloppervlakken altijd loodrecht moeten staan op de elektrische veldlijnen die het oppervlak snijden.



Als het elektrische veld uniform is, zullen de equipotentiaaloppervlakken evenwijdige equidistante vlakken zijn.

Als de ladingsdistributie een sferische symmetrie heeft zodat de ladingsdichtheid alleen afhangt van de afstand r tot het middelpunt, zoals bijvoorbeeld bij een (positieve) monopool, zal het elektrisch veld radiaal zijn. In dat geval is $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E_r dr$ en kunnen we dV als $dV = -E_r dr$. Daaruit volgt dan

$$E_r = -\frac{dV}{dr}.$$



In de figuur hiernaast zien we de equipotentiaaloppervlakken voor een dipool. Net zoals bij een monopool zien we dat deze niet equidistant zijn, omdat de dichtheid van de veldlijnen wijzigt.

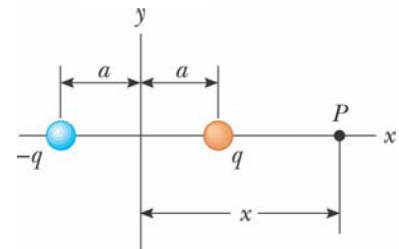
Algemeen kunnen we stellen dat de elektrische potentiaal een functie is van alle drie de ruimtecoördinaten. Als $V(r)$ gegeven is in termen van cartesiaanse coördinaten kunnen we de componenten van het elektrische veld E_x, E_y en E_z vinden door $V(x, y, z)$ partieel af te leiden¹:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Voorbeeld: elektrische potentiaal van een dipool

Example 25.4, blz. 773-774

Een elektrische dipool bestaat uit twee ladingen met gelijke grootte en tegengesteld teken, op een afstand $2a$ van elkaar. De dipool ligt volgens de x -as en is gecentreerd rond de oorsprong. De elektrische potentiaal in een punt P op de x -as, op afstand x van de oorsprong zoals op de tekening, is dan gelijk aan



$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a} \right) = \frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}.$$

In een punt ver van de dipool geldt

$$V \approx \frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x \gg a).$$

Omdat we uit (25.4) weten dat

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

kunnen we de grootte van het elektrisch veld in een punt ver van de dipool berekenen:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x \gg a).$$

Voor een punt tussen de twee ladingen geldt

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{a-x} + \frac{-q}{a+x} \right) = \frac{2k_e qx}{a^2 - x^2} \quad (-a < x < a)$$

dus er zal gelden dat

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{2k_e qx}{a^2 - x^2} \right) = -2k_e q \left(\frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} \right) \quad (-a < x < a).$$

¹In vectornotatie schrijft men \vec{E} met cartesiaanse coördinaten ook wel met de gradiënt ∇ :

$$\vec{E} = -\nabla V = -\text{grad}(V) = -\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) V$$

25.5 Elektrische potentiaal ten gevolge van een continue ladingsverdeling

25.5 Electric Potential Due to Continuous Charge Distributions, blz. 774-778

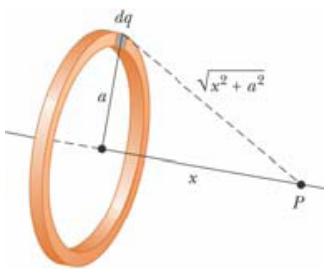
We kunnen de elektrische potentiaal ten gevolge van een continue ladingsverdeling berekenen op twee manieren. Als we de ladingsverdeling kennen, kunnen we vergelijking (25.3) gebruiken. We berekenen de potentiaal ten gevolge van een kleine lading dq door dq als een puntlading te beschouwen. De elektrische potentiaal dV op een punt P ten gevolge van de kleine lading dq is dan gelijk aan $dV = k_e \cdot dq/r$, waarbij r gelijk is aan de afstand van dq tot het punt P . Om de totale potentiaal in het punt P te bekomen, sommeren we over alle kleine ladingen:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}. \quad (25.5)$$

Hierbij hebben we de som vervangen door een integraal. De vergelijking toont dat we veronderstellen dat de elektrische potentiaal gelijk is aan 0 wanneer het punt P oneindig ver van de ladingsdistributie ligt.

Als we het elektrisch veld al kennen, bijvoorbeeld uit de wet van Gauss, en de ladingsdistributie is voldoende symmetrisch, dan kunnen we de elektrische potentiaal berekenen met vergelijking (25.2). We evalueren daarvoor eerst \vec{E} in een punt, om dan de verkregen waarde in te vullen in (25.2) om het potentiaalverschil ΔV tussen twee punten te bepalen. We kiezen de elektrische potentiaal V gelijk aan 0 op een zo ideaal mogelijk punt.

Voorbeeld: elektrische potentiaal ten gevolge van een uniform geladen ring



We zoeken een uitdrukking voor de elektrische potentiaal en de grootte van het elektrisch veld op een punt P op de as door het centrum van de ring, loodrecht op het vlak waarin de ring ligt. We veronderstellen dat de ring een straal a en een totale lading Q heeft. We kiezen het centrum van de ring in de oorsprong van ons assenstelsel en de as waarop P ligt als de positieve x -as.

We beschouwen de ring als kleine stukjes lading, waarbij we dan vergelijking (25.5) kunnen gebruiken.

We veronderstellen dat het punt P op een afstand x van het centrum van de ring ligt, zodat het ladings-element dq op een afstand $\sqrt{x^2 + a^2}$ van P ligt. Dan geldt:

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

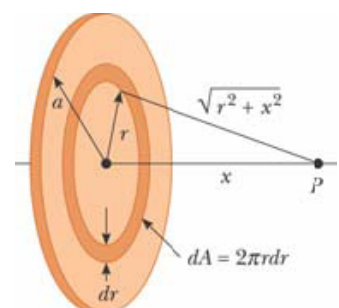
De enige variabele in deze uitdrukking is x , en dit is niet verwonderlijk omdat onze berekening alleen geldig is voor punten op de x -as, of nog: voor punten waarbij $y = 0$ en $z = 0$. Uit de symmetrie volgt dat \vec{E} alleen een x -component kan hebben voor punten op de x -as. Daarom geldt (25.4) en dus

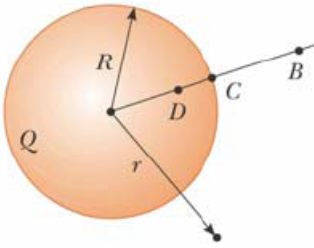
$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = -k_e Q (2x) \frac{-1}{2} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{k_e Q x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Voorbeeld: elektrische potentiaal ten gevolge van een uniform geladen schijf

We hebben een uniform geladen schijf met straal a en ladingsdichtheid σ . We gaan analoog te werk als in het vorige voorbeeld, alleen verdelen we de schijf ditmaal in concentrische ringen met dikte dr . De elektrische potentiaal ten gevolge van een ring met straal r is dan gegeven door het vorige voorbeeld. De oppervlakte van de ring is dan gelijk aan $dA = 2\pi r \cdot dr$. De lading op één ring is dan gelijk aan $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr$. Verder verloopt de berekening analoog, en bekomen we dat

$$V = 2\pi k_e \sigma (\sqrt{x^2 + a^2} - x) \quad \text{en} \quad E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right).$$



Voorbeeld: elektrische potentiaal ten gevolge van een uniform geladen bol

Een bol met straal R heeft een uniforme positieve volume-ladingsdichtheid en een totale lading Q . We veronderstellen dat de potentiaal 0 is voor $r = \infty$. In een voorbeeld in het vorige hoofdstuk (Serway Example 24.5) hebben we gevonden dat de grootte van het elektrisch veld buiten een uniform geladen bol met straal R gelijk is aan $E_r = k_e \cdot Q/r^2$, waarbij het elektrisch veld radiaal naar buiten wijst. Dit is hetzelfde als bij een puntlading. Om de potentiaal in een punt B te bekomen kiezen we een punt A met $r_A = \infty$.

Dan geldt $V_B - V_A = k_e Q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$ dus $V_B = k_e \frac{Q}{r}$ (voor $r > R$). Omdat de potentiaal continu moet zijn in $r = R$ volgt hieruit dat de potentiaal op het oppervlak van de bol (in een punt C) gelijk moet zijn aan $V_C = k_e \frac{Q}{r}$ (voor $r = R$).

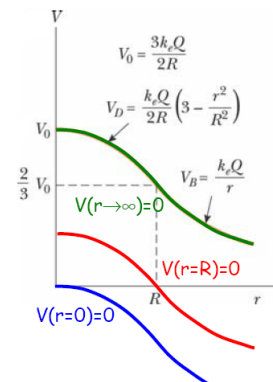
Voor een punt D in de bol hebben we in een voorbeeld in het vorige hoofdstuk (Serway Example 24.5) gevonden dat het elektrisch veld in de bol gelijk is aan $E_r = \frac{k_e Q}{R^3} r$ (voor $r < R$). We gebruiken dit resultaat en vergelijking (25.2) om de potentiële energie $V_D - V_C$ te berekenen:

$$V_D - V_C = - \int_R^r E_r dr = - \frac{k_e Q}{R^3} \int_R^r r dr = \frac{k_e Q}{2R^3} (R^2 - r^2).$$

Wanneer we hierin de waarde voor V_C invullen en oplossen naar V_D bekomen we

$$V_D = \frac{k_e Q}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{voor } r < R).$$

We kunnen nu een grafiek opstellen voor de potentiaal in, op en buiten de bol. We kunnen deze grafiek willekeurig vertikaal verschuiven, afhankelijk van de plaats waar we de potentiaal 0 definiëren.



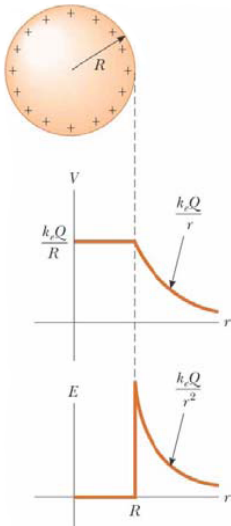
Wanneer we willen integreren vanop oneindig (A) naar een punt B buiten de bol gaan we als volgt tewerk:

$$\begin{aligned} \Delta V = V_B - V_A &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (\text{definitie}) \\ &= \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}' \quad (\text{integratiegrenzen omwisselen en teken veranderen}) \\ &= \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (d\vec{s}' = -d\vec{s} = d\vec{r}) \\ &= \int_B^A E \cdot dr \quad (d\vec{r} // \vec{E}) \\ &= k_e Q \int_{r_B}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = k_e Q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty} \right) = k_e \frac{Q}{r_B} \end{aligned}$$

25.6 Elektrische potentiaal van een geladen geleider

25.6 Electric Potential Due to a Charge Conductor, blz. 778-781

In de vorige sectie hebben we gewerkt met een isolator, waar een continue ladingsverdeling mogelijk is. Voor een geleider is dat echter niet mogelijk: alle netto lading zal zich op het oppervlak van de geleider bevinden en in de geleider zal er geen elektrisch veld aanwezig zijn. We gaan nu aantonen dat het oppervlak van een geleider in elektrostatisch evenwicht een constante potentiaal heeft.



We beschouwen daarvoor twee willekeurige punten A en B op het oppervlak van een geladen geleider. Langs een pad op het oppervlak dat deze twee punten verbindt zal \vec{E} altijd loodrecht staan op de verplaatsingsvector $d\vec{s}$, immers de elektrische veldlijnen moeten vlak buiten het oppervlak loodrecht op het oppervlak staan omdat de geleider in elektrostatic evenwicht is.

Er geldt dus $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, waaruit volgt dat $\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Dit resultaat geldt voor elk willekeurig paar punten op het oppervlak, dus V is constant op het oppervlak.

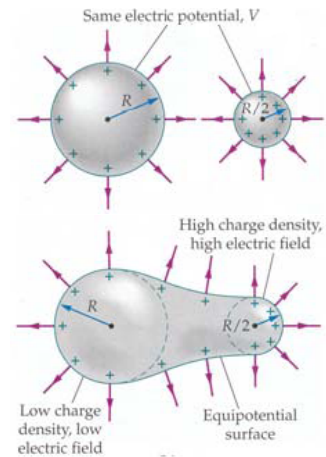
Dit wil zeggen dat het oppervlak van een geladen geleider in elektrostatic evenwicht een equipotentiaaloppervlak is. Omdat het elektrisch veld 0 is in de geleider mogen we concluderen dat de elektrische potentiaal constant is overal in de geleider en gelijk aan de potentiaal op het oppervlak. Er is dus geen arbeid nodig om een lading te bewegen binnen een geleider.

Als we een nettolading op een geleidende bol plaatsen, zal de oppervlakte-ladingsdichtheid uniform zijn. Echter, als de geleider niet bolvormig is zal de oppervlakte-ladingsdichtheid hoger zijn waar de kromtestraal kleiner is, en lager waar de kromtestraal groter is. Omdat het elektrisch veld net buiten de geleider proportioneel is met de oppervlakte-ladingsdichtheid is het elektrisch veld groot in de buurt van convexe punten met een kleine kromtestraal en enorm groot op scherpe punten.

Neem twee bollen met stralen R_1 en R_2 ($R_1 > R_2$) die op een relatief grote afstand van elkaar liggen. De ladingen op de bollen in elektrostatic evenwicht zijn respectievelijk q_1 en q_2 en ze zijn uniform geladen. Als we de bollen verbinden met een dun geleidend draadje, moeten ze dezelfde potentiaal hebben. Uit $V = k_e \frac{Q}{R} = k_e \frac{\sigma A}{R} = k_e \frac{\sigma 4\pi R^2}{R} = k_e \sigma 4\pi R$ volgt dat $\sigma = \frac{V}{4\pi k_e R}$. Er geldt ook $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, dus

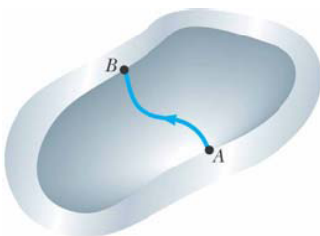
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Het elektrisch veld is dus het grootst op plaatsen met de kleinste kromtestraal.



Elektrisch veld binnen een geïsoleerde geleider met een caviteit

We veronderstellen dat we een geleider met een willekeurige vorm hebben, met binnenin een caviteit. We veronderstellen ook dat er zich geen ladingen in de caviteit bevinden. In dat geval moet het elektrisch veld in de caviteit nul zijn, ongeacht de ladingsverdeling buiten het oppervlak van de geleider. Omdat dat te bewijzen gebruiken we het feit dat elk punt in de geleider dezelfde potentiaal heeft, en we nemen twee punten A en B op het oppervlak van de caviteit. Als we veronderstellen dat er een \vec{E} bestaat in de caviteit dan moet gelden dat



$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Omdat $V_B = V_A$ moet de integraal van $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ gelijk zijn aan 0 voor alle paden tussen A en B . De enige manier waarop dat waar kan zijn voor alle paden en voor alle punten A en B willekeurig op het oppervlak van de caviteit, is als $\vec{E} = 0$ overal in de caviteit. We concluderen dus dat een caviteit omhuld door een geleider een veld-vrije zone is zolang er zich geen ladingen in de caviteit bevinden.

Corona ontleding

Een fenomeen dat we kennen als de *Corona ontleding* merken we vaak op in de buurt van een geleider. Wanneer het elektrisch veld in de omgeving van een geleider voldoende sterk is, kunnen elektronen van willekeurige ionisaties van luchtmoleculen versnellen weg van hun oudermolecule. Deze snel bewegende elektronen kunnen andere moleculen in de buurt van de geleider ioniseren, waardoor er meer vrije elektronen gecreëerd worden. De gloed die we zien is een resultaat van de hercombinatie van deze vrije elektronen met luchtmoleculen.

25.7 Het Millekan-experiment

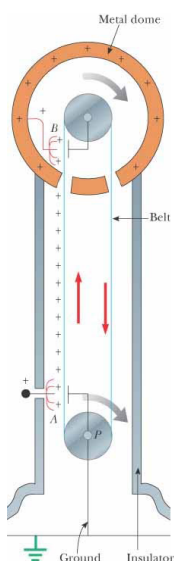
25.7 The Millikan Oil-Drop Experiment, blz. 781-782

Millikan heeft rond 1909 – 1913 een aantal experimenten gedaan waarin hij de grootte van een elementaire lading e heeft gemeten. Hiermee toonde hij de kwantisatie van lading aan. Zijn apparaat had twee parallelle metalen platen. Kleine oliedruppels van een verstuiver konden door een kleine opening in de bovenste plaat. Hij gebruikte x -stralen om de lucht in de kamer te ioniseren, zodat bevrijde elektronen aan de oliedruppeltjes zouden kleven en hen een negatieve lading geven. Een horizontale lichtbundel maakte de oliedruppels zichtbaar door een telescoop evenwijdig met de lichtstraal. Op die manier lijkt het alsof de oliedruppels lichtgevende sterren tegen een donkere achtergrond zijn, waardoor het individuele gedrag kan bestudeerd worden.

Als we veronderstellen dat één oliedruppeltje een massa m en een lading $-|q|$ heeft. Als er geen elektrisch veld is tussende twee platen, werken alleen de gravitatiekracht F_g en de wrijvingskracht F_W op het oliedruppeltje. De wrijvingskracht zal afhangen van de valsnelheid, die zijn uiteindelijke snelheid zal bereiken als $F_g = m\vec{g} = F_W$. Als we nu een batterij aansluiten op de platen, zal ook de elektrische kracht inwerken op het deeltje. Door vele observaties heeft Millikan hieruit kunnen afleiden dat de lading gekwantiseerd was met $e = 1.60 \cdot 10^{-19}C$.

25.8 Toepassingen

25.8 Applications of Electrostatics, blz. 782-784



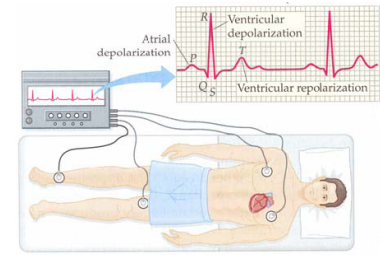
Toepassing: Van de Graaf versneller

Experimenten hebben aangetoond dat een geladen geleider die verbonden wordt met de binnenkant van een holle geleider al zijn lading verliest aan de holle geleider. In principe kan een holle geleider en zijn elektrische potentiaal worden verhoogd zonder limiet door herhaling van het proces.

Van de Graaf gebruikte dit principe om een elektrostatische generator te maken. Lading wordt continu geleverd door een hoge-potentiaal elektrode een bewegende band van isolerend materiaal. De elektrode met een hoog voltage is een holle metalen koepel op een isolerende kolom. De isolerende band wordt geladen door een corona effect tussen een reeks scherpe metalen naalden en een geaard net. De positieve lading op de bewegende riem wordt naar de koepel gebracht. Daar staan opnieuw een reeks scherpe metalen naalden. Omdat het elektrisch veld in de koepel verwaarloosbaar is, zullen de ladingen gemakkelijk van de band naar de naalden overspringen, ongeacht hun potentiaal.

Toepassing: elektrische potentiaal van een menselijk lichaam

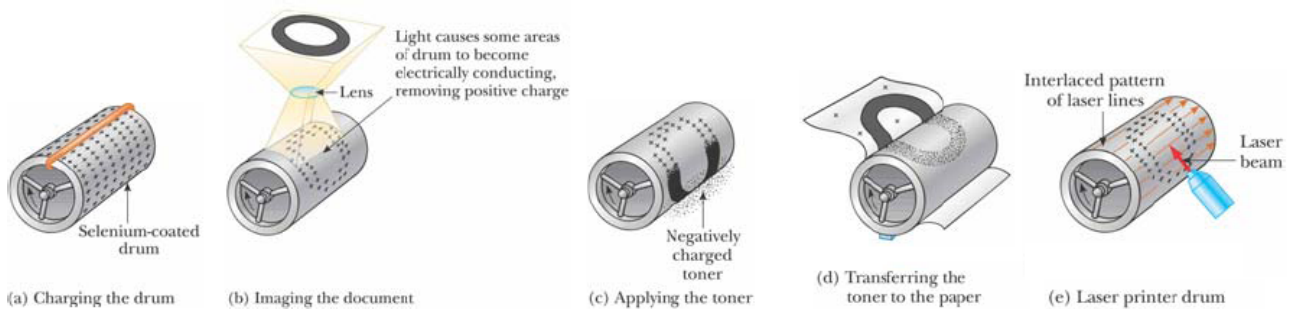
ECG: ElektroCardioGram

**Toepassing: laserprinter**

Een laserprinter gebruikt een *foto-geleidend materiaal* [photoconductor]. Dit is een materiaal dat geen goede geleider is in het donker maar wel wanneer deze blootgesteld wordt aan licht.

De printkop is bedekt met een dun laagje foto-geleidend materiaal. Het krijgt dan een positieve elektrostatische lading mee in het donker. Het beeld van de pagina die moet geprint worden wordt door een lens gestuurd op het geladen oppervlak. Het foto-geleidend materiaal wordt daardoor geleidend op de plaatsen waar licht gescheten heeft. De printkop zal op die plaatsen dan een positieve lading hebben. Daarna wordt de negatieve geladen inkt verspreid op het foto-geleidend materiaal. Het zal alleen blijven plakken op de delen die positief geladen zijn. Op dit punt wordt het beeld zichtbaar. De printkop rolt dan over een positief geladen papier, en de inkt kleeft op het papier. Tenslotte wordt de inkt vastgezet op het papier omdat het smelt wanneer het door rollen met een hoge temperatuur gaat. Dit resulteert in een permanente kopie van het origineel.

In een laserprinter wordt echter een laser straal gebruikt om positieve ladingen aan te brengen op de printkop, in plaats van een lens.



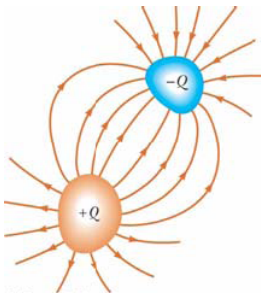
Hoofdstuk 26

Condensatoren en diëlektrica

26 Capacitance and Dielectrics, blz. 795-830

26.1 Definitie van Capaciteit

26.1 Definition of Capacitance, blz. 796-797



We beschouwen twee geleiders die een lading dragen met gelijke grootte Q en tegengesteld teken. In de ruimte tussen de geleiders zit een isolerend materiaal, een *diëlektricum*, dat ook vacuüm kan zijn. Zo'n combinatie noemen we een *condensator* [*capacitor*]. Een condensator wordt gebruikt om elektrische ladingen en elektrische energie op te slaan, wat mogelijk is omdat positieve en negatieve ladingen gescheiden zijn. De geleiders van een condensator noemen we de platen. Door de aanwezigheid van de ladingen op de platen zal er een potentiaalverschil ΔV zijn tussen de platen.

We definiëren de *capaciteit* C van een condensator als de verhouding van de grootte van de lading op één van de platen tot de grootte van het potentiaalverschil tussen de platen:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} .$$

We merken op dat de capaciteit dus per definitie positief is. De capaciteit is constant voor een condensator. De eenheid van capaciteit is *Farad* $F = C/V$.

26.2 Capaciteit berekenen

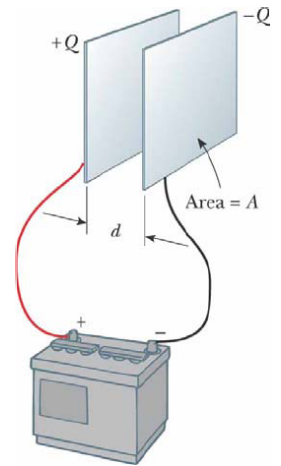
26.2 Calculating Capacitance, blz. 797-802

We kunnen de capaciteit van een condensator als volgt berekenen: we veronderstellen dat de condensator een lading Q heeft. We kunnen dan met de bekende technieken het potentiaalverschil ΔV tussen de twee platen berekenen. De uitdrukking $C = Q/\Delta V$ geeft dan een waarde voor de capaciteit.

Meestal heeft een systeem twee geleiders, maar ook een alleenstaande geleider heeft een capaciteit. Om deze te berekenen beelden we ons in dat er een tweede geleider met tegengestelde lading op oneindig ligt, waarvoor we $V = 0$ veronderstellen. We kunnen de capaciteit dan berekenen alsof er twee gewone geleiders zijn. Voor een geleidende bol met straal R en lading Q is de capaciteit gelijk aan $4\pi\epsilon_0 R$.

Parallele platen condensator

Een *parallele platen condensator* bestaat uit twee evenwijdige platen met gelijke oppervlakte A op een afstand d van elkaar. We veronderstellen dat de lading die op een plaat gezet kan worden evenredig is met de oppervlakte A van de plaat. Als de batterij die de twee platen met elkaar verbindt een constant potentiaalverschil heeft aan de uiteinden, zal het elektrisch veld tussen de platen stijgen als d kleiner wordt, immers $\Delta V = Ed$. Maar als we veronderstellen dat we d kleiner maken en de situatie dan bekijken voor de ladingen de kans gehad hebben om zich te herverdelen, zien we iets anders. Het elektrisch veld E tussen de platen blijft dan constant, waardoor ΔV kleiner moet zijn. Het nieuwe potentiaalverschil tussen de platen zal dan ook kleiner zijn dan het potentiaalverschil van de batterij, waardoor de condensator verder wordt opgeladen. Hieruit volgt dat de capaciteit van een parallelle platen condensator omgekeerd evenredig is met de afstand tussen de platen.

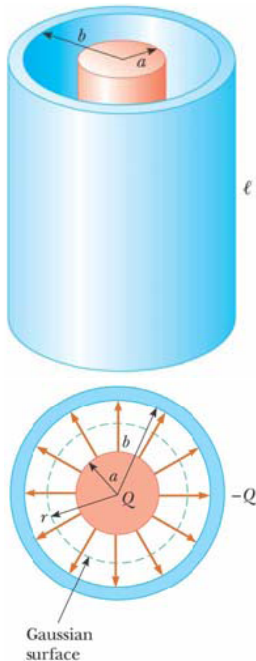


We kunnen deze fysische argumenten verifiëren door de capaciteit van een parallelle platen condensator af te leiden. De oppervlakte-ladingsdichtheid van de platen is gelijk aan $\sigma = Q/A$. Als de platen relatief dicht bij elkaar staan kunnen we veronderstellen dat het elektrisch veld uniform is tussen de platen en 0 daarbuiten. We weten dat $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$. Omdat het veld tussen de twee platen uniform is, geldt $\Delta V = Ed$, dus $\Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$. Hieruit volgt dat

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A} = \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

We mogen dus besluiten dat de capaciteit van een parallelle platen condensator evenredig is met de oppervlakte van de platen en omgekeerd evenredig met de afstand tussen de platen. De factor ϵ_0 hangt af van het diëlektricum, de factor $\frac{A}{d}$ van de geometrie.

Cilindrische condensator



Een *cilindrische condensator* bestaat uit een cilinder met straal a en lading Q , en een coaxiale cilindrische schil met verwaarloosbare dikte, straal $b > a$ en lading $-Q$. Beide cilinders hebben lengte l . We veronderstellen dat $l \gg a$, zodat we randeffecten kunnen negeren. We kennen het elektrisch veld van een cilindrische ladingsdistributie al uit vorige berekeningen:

$$\vec{E} = \frac{2k_e \lambda}{r} \vec{u}_r \quad \left(\text{met } \lambda = \frac{Q}{l} \right).$$

Hetzelfe resultaat geldt hier omdat de buitenste cilinder geen invloed heeft op het elektrisch veld binnenin. \vec{E} is dus alleen afhankelijk van r en $\vec{E} // \vec{r}$, dus ΔV is eenvoudig te berekenen. Daaruit zal volgen dat

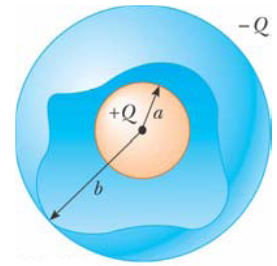
$$C = \frac{l}{2k_e \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

De capaciteit per lengte-eenheid van een coaxiale kabel is dus gelijk aan

$$\frac{C}{l} = \frac{1}{2k_e \ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

Sferische condensator

Een *sferische condensator* bestaat uit een geladen bol met straal a en lading Q , en een concentrische schil met straal $b > a$ en lading $-Q$. We weten dat het elektrisch veld van een sferische ladingsdistributie radiaal is en gegeven door $E_r = \frac{k_e Q}{r^2}$. In dit geval geldt dit resultaat voor de ruimte tussen de bol en de sfeer. Voor $r < a$ en $r > b$ geldt $E = 0$. Het potentiaalverschil is dan eenvoudig te berekenen met de definitie en is gelijk aan $\Delta V = k_e Q \frac{(b - a)}{ab}$.



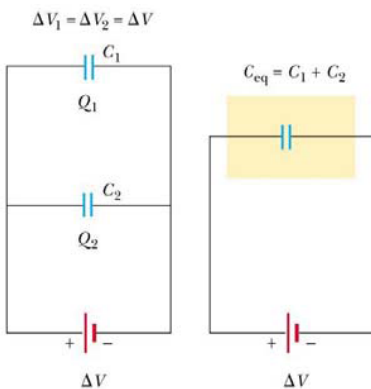
Daaruit volgt dat de capaciteit van een sferische condensator gelijk is aan $C = \frac{ab}{k_e(b - a)}$. Voor $b \rightarrow \infty$ geldt $C \rightarrow a/k_e = 4\pi\epsilon_0 a$. Dit komt overeen met de capaciteit van een geïsoleerde geleidende bol.

26.3 Schakelen van condensatoren

26.3 Combinations of Capacitors, blz. 802-806

Vaak worden twee of meer condensatoren geschakeld in een elektrisch circuit. We veronderstellen altijd dat de condensators initieel niet geladen zijn.

parallele schakeling



Het potentiaalverschil over de individuele condensatoren is gelijk aan de bronspanning voor parallel geschakelde condensatoren, immers de geleiders zijn in elektrostatisch evenwicht en het potentiaalverschil langs de geleider is nul. De totale lading op parallel geschakelde condensatoren is gelijk aan de som van de ladingen op de individuele condensatoren. Als we de capaciteiten van de individuele condensatoren kennen, kunnen we de ladingen op de individuele condensatoren berekenen:

$$\Delta V_i = \Delta V \quad \Rightarrow \quad Q_i = C_i \Delta V .$$

Als we meerdere parallel geschakelde condensatoren willen vervangen door één equivalente condensator C_{eq} , geldt

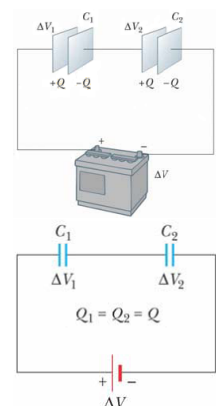
$$C_{eq} = \frac{\sum_i Q_i}{\Delta V} = \sum_i C_i .$$

De capaciteit van een condensator equivalent aan een reeks parallel geschakelde condensatoren is dus gelijk aan de algebraïsche som van de capaciteiten van de individuele condensatoren.

seriële schakeling

Wanneer twee condensatoren serieel geschakeld worden, geldt dat de platen die met elkaar verbonden zijn een geïsoleerde geleider vormen en steeds een nettolading 0 hebben, zoals duidelijk is in de tekening.

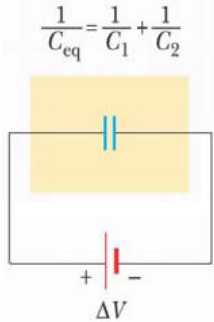
We beschouwen nu twee serieel geschakelde, ongeladen condensatoren en bekijken wat er gebeurt net nadat de schakeling met de batterij verbonden wordt. Als de schakeling met de batterij wordt verbonden zullen elektronen uit de linkse plaat van C_1 verplaatst worden naar de rechtse plaat van C_2 . Daardoor wordt de linkse plaat van C_1 positief geladen, en de rechtse plaat van C_2 negatief geladen. De geïsoleerde geleider die de rechtse plaat van C_1 en de linkse plaat van C_2 bevat zal nu zijn negatieve ladingen naar C_1 sturen en zijn positieve ladingen naar C_2 . Het resultaat hiervan is dat alle linkse platen een lading $+Q$ krijgen, en alle rechtse platen een lading $-Q$. De ladingen van de individuele condensatoren in een serieschakeling zijn dus gelijk.



Verder geldt ook dat het totale potentiaalverschil over meerdere serieel geschakelde condensatoren gelijk is aan de som van de potentiaalverschillen van de individuele condensatoren:

$$Q_i = Q \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \sum_i \Delta V_i .$$

Als we veronderstellen dat de condensator die equivalent is aan de serieel geschakelde condensatoren hetzelfde effect heeft op het circuit als de serieel geschakelde condensatoren wanneer ze met de batterij wordt verbonden, moet de linkse plaat van de equivalente condensator een lading $+Q$ hebben en de rechtse plaat een lading $-Q$.



Omdat $\Delta V = Q/C$ geldt

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \Delta V = \sum_i \Delta V_i = \sum_i \frac{Q}{C_i} \quad \text{dus} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i} .$$

De inverse van de capaciteit van een condensator equivalent aan een reeks serieel geschakelde condensatoren is dus gelijk aan de algebraïsche som van de inverse van de capaciteiten van de individuele condensatoren.

26.4 Energie opgeslagen in een condensator

26.4 Energy Stored in a Charged Capacitor, blz. 807-810

We veronderstellen dat we een condensator opladen door positieve ladingen van de ene plaat te nemen en daar een kracht op uit te oefenen om ze naar de andere plaat te brengen. Stel dat we een condensator hebben met capaciteit C en totale lading Q als de condensator helemaal is opgeladen. Als q de lading is op de condensator op een bepaald moment in het opladingsproces. Dan is het potentiaalverschil tussen de platen op dat moment gelijk aan $\Delta V = q/C$. De arbeid die geleverd moet worden om een lading dq van de plaat met lading $-q$ naar de plaat met lading q te brengen is gelijk aan

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq .$$

De totale arbeid die moet geleverd worden om een condensator op te laden van $q = 0$ naar $q = Q$ is gelijk aan

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} .$$

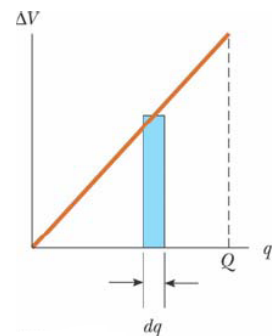
De geleverde arbeid bij het opladen van de condensator verschijnt in de elektrische potentiële energie U in de condensator:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 .$$

Dit resultaat is onafhankelijk van de vorm van de condensator. We zien dat voor een gegeven capaciteit de potentiële energie verhoogt als de lading op de condensator verhoogt of als het potentiaalverschil tussen de platen verhoogt.

We kunnen de energie opgeslagen in een condensator beschouwen als energie opgeslagen in het elektrisch veld dat gecreëerd wordt tussen de platen als de condensator wordt opgeladen. Dit is een aanvaardbare beschrijving omdat het elektrisch veld tussen de platen evenredig is met de lading op de condensator. Voor verschillende condensatoren kennen het de relatie tussen ΔV en E , en ook de capaciteit C . Daaruit kunnen we de energie per volume-eenheid bepalen, of nog: de *energiedichtheid* u_E :

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} .$$

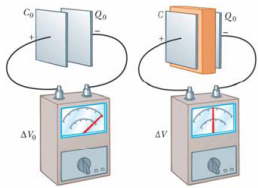


De energiedichtheid in een elektrisch veld is dus evenredig met de grootte van het elektrisch veld op een bepaald punt in het kwadraat.

26.5 Condensatoren met diëlektrica

26.5 Capacitors with Dielectrics, blz. 810-814

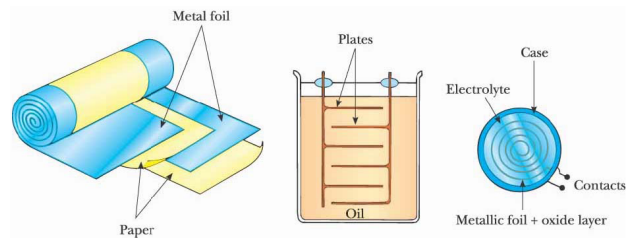
Een *diëlektricum* is een niet-geleidend materiaal. Als er een diëlektricum tussen de platen van een condensator zit, zal de capaciteit van die condensator stijgen. Als het diëlektricum de ruimte tussen de platen volledig opvult, zal de capaciteit stijgen met een dimensieloze factor $\kappa = \epsilon_r$ die we de *diëlektrische constante* of *relatieve permittiviteit* van het diëlektricum noemen. De diëlektrische constante hangt af van het materiaal maar is altijd groter of gelijk aan 1. Als C_0 de capaciteit is van de condensator zonder diëlektricum en C de capaciteit met diëlektricum, geldt $C = \kappa C_0$ en $\Delta V = \Delta V_0 / \kappa$.



Voor een parallelle platen condensator geldt $C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{d}$. We kunnen de capaciteit dus verhogen door d kleiner te maken. Er is echter een limiet: de *diëlektrische sterkte*. Dit is het maximum elektrisch veld dat men voor een gegeven d kan aanleggen zonder doorslag te veroorzaken.

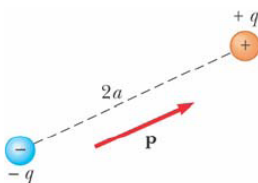
Een condensator met een diëlektricum heeft dus volgende voordelen: een verhoogde capaciteit, een verhoogd maximaal potentiaalverschil en mechanisch kunnen de platen van de condensator beter ondersteund worden.

In de figuur hiernaast zien we enkele voorbeelden van condensatoren.



26.6 Een elektrische dipool in een elektrisch veld

26.6 Electric Dipole in an Electric Field, blz. 815-817



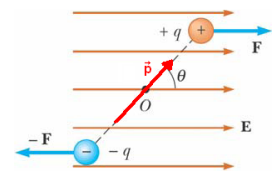
Alvorens we het effect van een diëlektricum in een condensator kunnen verklaren moeten we wat meer weten over dipolen. We definiëren het *elektrisch dipoolmoment* \vec{p} van de dipool in de figuur als de vector van $-q$ naar $+q$ met grootte $2aq$:

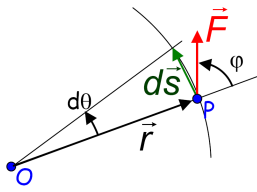
$$\vec{p} = 2aq\vec{u}_r .$$

We plaatsen nu een dipool in een uniform elektrisch veld \vec{E} (extern aan de dipool) en veronderstellen dat de dipool een hoek θ met \vec{E} maakt. De elektrische kracht die werkt op de twee ladingen zal voor de twee ladingen gelijk zijn in grootte ($F = qE$) en tegengesteld in richting. Toch produceren de twee krachten een netto *krachtmoment [torque]* dat ervoor gaat zorgen dat de dipool gaat roteren en meer in de richting van het elektrisch veld gaat liggen. Voor het krachtmoment geldt

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E} .$$

We kunnen de potentiële energie van het systeem (een dipool in een extern elektrisch veld) bepalen in functie van de oriëntatie van de dipool ten opzichte van het extern elektrisch veld. Er moet immers arbeid geleverd moet worden om de dipool in een positie te brengen zodat de dipool niet gelijnd is met het extern elektrisch veld. De arbeid die hiervoor moet geleverd worden, wordt opgeslagen als potentiële energie in het systeem.



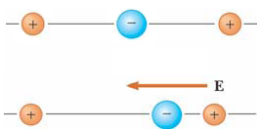
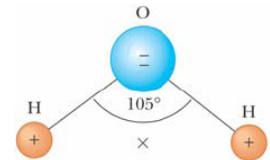


De arbeid die moet geleverd worden om de dipool te roteren over een hoek $d\theta$ is gelijk aan $dW = \tau d\theta$. Omdat $\tau = pE \sin \theta$ en omdat de geleverde arbeid resulteert in een stijging van de potentiële energie U van het systeem, vinden we dat voor een rotatie van θ_i naar θ_f de verandering in potentiële energie gelijk is aan

$$\Delta U = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = pE(\cos \theta_i - \cos \theta_f).$$

Als we $\theta_i = 90^\circ$ kiezen geldt $U_i = 0$ dus $U = U_f = -pE \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Hieruit volgt dat $U_{min} = -pE$ en $U_{max} = +pE$.

Moleculen zijn *gepolariseerd* indien er een afstandsverschil bestaat tussen de gemiddelde plaats van de negatieve ladingen en de gemiddelde plaats van de positieve ladingen. Bij *polaire moleculen* is deze conditie voortdurend aanwezig, bij *niet-polaire moleculen* is er geen permanente polarisatie. Een voorbeeld van een polaire molecule is water: H_2O .



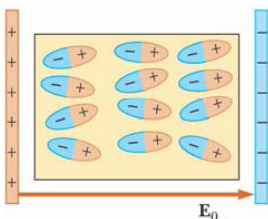
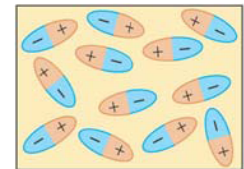
Een symmetrische molecule heeft nooit een permanente polarisatie. Wanneer ze in een elektrische veld geplaatst wordt, krijgt ze een *geïnduceerde polarisatie* omdat positieve en negatieve ladingen in tegenovergestelde richtingen verschoven worden.

26.7 Diëlektrica op atomaire schaal

26.7 An Atomic Description of Dielectrics, blz. 817-820

We weten dat het potentiaalverschil ΔV_0 tussen de platen van een condensator gereduceerd wordt tot Δ_0/κ als er een diëlektricum wordt tussen geschoven. Het potentiaalverschil wordt kleiner omdat de grootte van het elektrisch veld tussen de platen kleiner wordt. Als we veronderstellen dat \vec{E}_0 gelijk is aan het elektrisch veld zonder het diëlektricum, dan is het elektrisch veld met het diëlektricum gelijk aan $\vec{E} = \vec{E}_0/\kappa$.

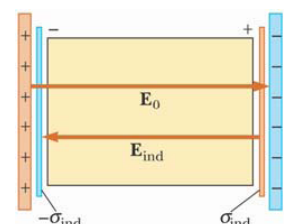
Laat ons nu eerst veronderstellen dat het diëlektricum opgebouwd is uit polaire moleculen, die we beschouwen als kleine dipolen. De dipolen zijn dan willekeurig georiënteerd in het diëlektricum door thermische beweging en in afwezigheid van een elektrisch veld.

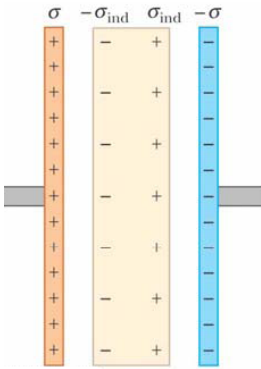


Wanneer we een uitwendig elektrisch veld \vec{E}_0 aanleggen over het diëlektricum (met de condensator) zullen de dipolen een krachtmoment krijgen. Daardoor zullen ze gedeeltelijk oplijnen. De graad van oplijning van de moleculen met het elektrisch veld hangt af van de temperatuur en van de grootte van het elektrisch veld. Meestal zal de oplijning groter zijn bij een lagere temperatuur en een groter uitwendig elektrisch veld.

In de niet-polaire moleculen van het diëlektricum zal het elektrisch veld ten gevolge van de condensator een scheiding van ladingen veroorzaken, waardoor de niet-polaire moleculen een geïnduceerd dipoolmoment krijgen. Deze geïnduceerde dipoolmomenten zullen oplijnen met het uitwendig elektrisch veld en het diëlektricum is dus gepolariseerd. Hieruit kunnen we besluiten dat we een diëlektricum kunnen polariseren met een uitwendig elektrisch veld, of de moleculen nu polair of niet-polair zijn.

Door de polarisatie van het diëlektricum met het elektrisch veld aangelegd door de condensator, krijgen we dus een geïnduceerde lading op de eindvlakken van het diëlektricum. We krijgen een vlak met oppervlakte-ladingsdichtheid $-\sigma_{ind}$ als de plaat van de condensator aan die kant oppervlakte-ladingsdichtheid σ heeft. Aan de andere plaat krijgt het vlak een oppervlakte-ladingsdichtheid σ_{ind} mee. Deze vlakken veroorzaken een geïnduceerd elektrisch veld E_{ind} in de tegengestelde richting. Het uiteindelijk elektrisch veld \vec{E} heeft dan grootte $E = E_0 - E_{ind}$. We zien nu ook waarom altijd geldt dat $\kappa > 1$. Het veld E_{ind} zal altijd tegengesteld aan E_0 dankzij de dipolen, dus $E_0 > E$. Hieruit volgt dat $\kappa > 1$.





We beschouwen nu de parallelle platen condensator in de figuur hiernaast. Hier geldt $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ en $E_{ind} = \sigma_{ind}/\epsilon_0$. Omdat $E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}$ geldt

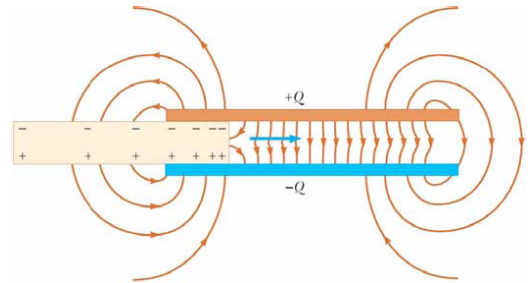
$$\sigma_{ind} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) \sigma \quad \text{en} \quad Q_i = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right) Q.$$

Omdat $\kappa > 1$ is het volgt hieruit dat $\sigma_{ind} < \sigma$ en $Q_i < Q$. Omdat $E = \sigma/\epsilon$ met ϵ de permitiviteit van het diëlektricum geldt $\epsilon \equiv \epsilon_0\kappa = \epsilon_0\epsilon_r$.

Als er geen diëlektricum tussen de platen zit geldt $E_i = 0$ en $\sigma_i = 0$, er zijn immers geen moleculen om op te lijnen. Als er in de plaats van het diëlektricum een geleider zit, moet het elektrisch veld binnen de geleider 0 zijn ($E = 0$). Hieruit volgt dat $E_{ind} = E_0$ en $\sigma_i = \sigma$.

De randeffecten van een condensator zorgen ervoor dat het diëlektricum in de condensator wordt gezogen. Daardoor verlaagt de energie opgeslagen in een condensator die losgekoppeld is van de bron wanneer er een diëlektricum wordt ingeschoven.

Het elektrisch veld van de condensator werkt op de geïnduceerde ladingsoppervlakken van het diëlektricum. De verticale componenten van het elektrisch veld heffen elkaar op en de horizontale componenten van het elektrisch veld versterken elkaar. Hierdoor wordt er een netto horizontale kracht geproduceerd die het diëlektricum in de condensator trekt.



Hoofdstuk 27

Elektrische stroom en weerstand

27 Current and Resistance, blz. 831-857

Tot hertoe hebben we elektrische fenomenen bestudeerd van ladingen in evenwicht: *elektrostatica*. Vanaf nu gaan we situaties beschouwen waar elektrische ladingen niet in evenwicht zijn: *elektrodynamica*.

27.1 Elektrische stroom

27.1 Electric Current , blz. 832-835

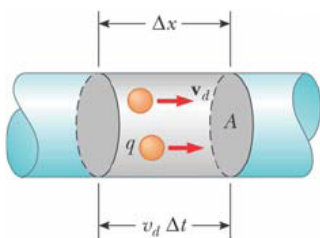
We bestuderen de beweging van elektrische ladingen doorheen materie, die afhangt van het soort materiaal en van het potentiaalverschil over het stuk materiaal. We gebruiken de term *elektrische stroom* of *stroom* [*current*] als er netto ladingstransport is door een oppervlak.

Om stroom meer precies te definiëren, veronderstellen we dat ladingen loodrecht door een oppervlak A bewegen. De elektrische stroom is dan gelijk aan het tempo waaraan er elektrische lading door het oppervlak stroomt. De gemiddelde stroom I_{gem} is dan gelijk aan het aantal ladingen dat door A beweegt per tijdseenheid:

$$I_{gem} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} .$$

De ogenblikke stroom I definiëren we als $I \equiv dQ/dt$ met eenheid *ampère* $A = C/s$. De conventie voor het teken van elektrische stroom zegt dat we de elektrische stroom tekenen in dezelfde richting als de stroom positieve ladingen. In een geleider is elektrische stroom echter een gevolg van de beweging van negatief geladen elektronen. De richting van de elektrische stroom is dus tegengesteld aan de richting van de elektronenstroom. Het is gebruikelijk om naar bewegende ladingen, zowel positief als negatief, te refereren als *ladingsdragers*.

Microscopisch model van elektrische stroom



We kunnen elektrische stroom in verband brengen met de beweging van ladingsdragers in een microscopisch model voor een geleider. We beschouwen de geleider in de figuur hiernaast, en beschouwen een stuk met lengte Δx van de geleider met doorsnede A . Het volume van het stukje geleider is dan gelijk aan $A\Delta x$. Als n het aantal ladingsdragers per volume-eenheid voorstelt (de ladingsdragersdichtheid) dan is het aantal ladingen in het stukje geleider gelijk aan $nA\Delta x$.

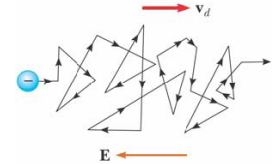
Als de lading per ladingsdrager gelijk is aan q is de totale lading in het stukje geleider gelijk aan

$$\Delta Q = \text{aantal ladingsdragers} \times \text{lading per ladingsdrager} = (nA\Delta x)q .$$

Als de snelheid van de ladingsdragers gelijk is aan v_d geldt $\Delta x = v_d \Delta t$. We kiezen dan Δt gelijk aan het tijdsinterval dat de ladingen nodig hebben om door het stukje geleider te bewegen. Met deze keuze kunnen we ΔQ als volgt schrijven:

$$\Delta Q = (nAv_d \Delta t)q \quad \Rightarrow \quad I_{gem} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_d A .$$

De snelheid van de ladingsdragers noemen we de *driftsnelheid* v_d , dit is een gemiddelde netto snelheid. De elektronen bewegen namelijk niet in een rechte lijn: ze botsen voortdurend en ze zijn ook onderhevig aan de wrijvingskracht.



27.2 Weerstand

27.2 Resistance , blz. 835-840

In hoofdstuk 24 hebben we gevonden dat het elektrisch veld binnen een geleider altijd gelijk is aan 0. Dit is echter alleen waar voor een geleider in elektrostatisch evenwicht. Als we een geleider beschouwen met een doorsnede A waardoor een stroom I loopt, dan definiëren we de *stroomdichtheid* J in de geleider als de stroom per oppervlakte-eenheid:

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d .$$

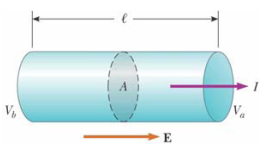
De stroomdichtheid wordt uitgedrukt in A/m^2 , en is verbonden aan een voorwaarde: de stroom moet uniform zijn en het oppervlak moet loodrecht op de stroomrichting staan. We drukken de stroomdichtheid daarom uit als een vectoriële grootte:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d .$$

Wanneer het potentiaalverschil over een geleider constant gehouden wordt, ontstaat er een stroomdichtheid J en een elektrisch veld E . In sommige materialen is de stroomdichtheid evenredig met het elektrisch veld en geldt $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ waarbij σ de *geleidbaarheid* [conductivity] van het materiaal is.

De wet van Ohm zegt dat de verhouding van de stroomdichtheid en het elektrisch veld een constante is. Niet alle materialen voldoen aan de wet van Ohm. De materialen die hier wel aan voldoen noemen we *ohmse materialen*, de andere materialen noemen we niet-ohmse materialen.

We beschouwen nu een rechte draad met doorsnede A en lengte l zoals in de figuur. We leggen een potentiaalverschil $\Delta V = V_b - V_a$ aan over de geleider, waardoor er een elektrisch veld $E = \Delta V/l$ en een stroom in de geleider ontstaat. We kunnen nu de grootte van de stroomdichtheid in de geleider berekenen:



$$J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{l} .$$

Omdat $J = I/A$ kunnen we het potentiaalverschil nu schrijven als $\Delta V = \frac{l}{\sigma} J = \left(\frac{l}{\sigma A} \right) I = RI$ waarbij we de grootte $R = \frac{l}{\sigma A}$ de weerstand van de geleider noemen. We definiëren de *weerstand* R van een geleider eigenlijk als volgt:

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I} .$$

De weerstand wordt uitgedrukt in *ohm* $\Omega = V/A$.

De inverse grootte van geleidbaarheid is de *resistiviteit* $\rho = 1/\sigma$ die uitgedrukt wordt in Ωm . De resistiviteit is afhankelijk van het materiaal en de temperatuur van de geleider. Er geldt dus

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

waarbij ρ voor de eigenschappen van het materiaal staat en l/A voor de geometrie van de geleider. De meeste elektrische circuits gebruiken weerstanden om de stroom in bepaalde delen van het circuit te controleren.

27.3 Een model voor elektrische geleiding

27.3 A Model for Electrical Conduction , blz. 841-843

We beschouwen een geleider als een rij van atomen plus een collectie vrije elektronen die we soms *geleidings-elektronen* noemen. De geleidings-elektronen zijn gebonden in een geïsoleerd atoom maar vrij in een vastestofrooster. De driftsnelheid van de elektronen is 0 zolang er geen elektrisch veld over de geleider staat omdat de bewegingen van de afzonderlijke elektronen (aan ongeveer $10^6 m/s$) elkaar opheffen.

De situatie verandert als er een elektrisch veld op de geleider wordt gezet. De gemiddelde driftsnelheid is dan gelijk aan ongeveer $10^{-4} m/s$. Het elektrisch veld zorgt ervoor dat gemiddeld elektronen zich zullen verplaatsen tegen de richting van het elektrisch veld in. Bij botsingen verliezen de elektronen energie door weerstand, waarbij de vibraties dan voor warmte zorgen.

We kunnen nu een uitdrukking afleiden voor de driftsnelheid. Als een vrij elektron met massa m_e en lading $q = -e$ onderhevig is aan een elektrisch veld \vec{E} dan ondervindt het een kracht $\vec{F} = q\vec{E}$. Omdat deze kracht afhangt van de snelheid van het elektron (wegens de tweede wet van Newton: $\vec{F} = m_e\vec{a}$) kunnen we concluderen dat $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m_e}$. Deze versnelling, die alleen voorkomt in het korte tijdsinterval tussen twee botsingen, geeft het elektron een kleine driftsnelheid. Als \vec{v}_i de beginsnelheid van elektron na de botsing is, dan is de snelheid van het elektron op het tijdstip t (als de volgende botsing gebeurt) gelijk aan

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t = \vec{v}_i + \frac{q\vec{E}}{m_e}t .$$

We nemen nu de gemiddelde waarde voor \vec{v}_f voor alle mogelijke botsingstijden t en alle mogelijk waarden voor \vec{v}_i . We veronderstellen hierbij dat de beginsnelheden willekeurig zijn, waardoor de gemiddelde beginsnelheid gelijk is aan 0. De term $(q\vec{E}/m_e)t$ is de snelheidsverandering van het elektron ten gevolge van het elektrisch veld op zijn weg tussen twee atomen. De gemiddelde snelheid van deze term is gelijk aan $(q\vec{E}/m_e)\tau$ waarbij τ de gemiddelde tijd tussen twee botsingen is. Omdat de gemiddelde snelheid van \vec{v}_f gelijk is aan de driftsnelheid geldt

$$\overline{\vec{v}_f} = \vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{m_e}\tau .$$

Hieruit volgt dat $J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m_e}\tau$ waarbij n het aantal ladingsdragers per volume-eenheid is. Door deze uitdrukking te vergelijken met de wet van Ohm bekomen we dat

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e} \quad \text{en} \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau} .$$

Dit klassiek model zegt dus dat geleidbaarheid en weerstand niet afhangen van de sterkte van het elektrisch veld. Deze eigenschap is karakteristiek voor een geleider die de wet van Ohm volgt.

Het gemiddeld tijdsinterval τ tussen twee botsingen hangt af van de gemiddelde afstand tussen twee botsingen l en de gemiddelde snelheid \bar{v} op de volgende manier: $\tau = l/\bar{v}$.

27.4 Weerstand en temperatuur

27.4 Resistance and Temperature , blz. 843-844

Over een beperkt temperatuursinterval geldt dat de resistiviteit van een geleider varieert evenredig met de temperatuur. We nemen ρ_0 de resistiviteit op een referentietemperatuur T_0 , waarbij de weerstand gelijk is aan R_0 . Dan is ρ de resistiviteit op een temperatuur T als de weerstand gelijk is aan R .

De *temperatuurscoëfficiënt voor resistiviteit* α is dan gelijk aan

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0(T - T_0)} .$$

De relaties resistiviteit-temperatuur en weerstand-temperatuur worden dan gegeven door de volgende uitdrukkingen:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \\ R &= R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]\end{aligned}$$

27.5 Supergeleiders

27.5 Superconductors , blz. 844-845

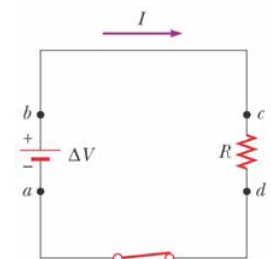
Er is een groep (samengestelde) metalen bij wie de weerstand naar 0 zakt als ze onder de *kritieke temperatuur* T_c komen. Deze materialen kennen we als *supergeleiders*.

27.6 Elektrische energie en vermogen

27.6 Electrical Power , blz. 845-849

In een standaard elektrisch circuit wordt energie getransporteerd van een bron, zoals een batterij, naar een toestel, zoals een lamp. We willen het tempo van deze energie transportatie bepalen. We beschouwen daarvoor een eenvoudig circuit waarbij de energie van een batterij wordt afgeleverd bij een weerstand. De geleidende draden die de batterij en de weerstand verbinden hebben ook een weerstand, maar we veronderstel dat deze verwaarloosbaar is in vergelijking met de weerstand van het toestel.

We beelden ons in dat we een positieve lading Q volgend die in wijzerzin beweegt in het circuit. De lading begint in het punt a , gaat door de batterij en door de weerstand en komt dan terug aan in a . Als de lading beweegt van a naar b door de batterij zal de elektrische potentiële energie van het systeem verhogen met $Q\Delta V$, terwijl de chemische potentiële energie van de batterij verlaagt. Als de lading van c naar d door de weerstand gaat zal het systeem elektrische potentiële energie verliezen, terwijl de weerstand aan interne energie zal winnen.



Omdat we de weerstand in de draden verwaarlozen zal er geen energie getransformeerd worden in de paden bc en da . Als de lading terug in het punt a komt is het netto resultaat dat een deel van de chemische energie in de batterij naar de weerstand is gebracht waar het als interne energie (moleculaire vibraties) wordt opgeslagen.

De weerstand verliest potentiële energie onder de vorm van warmte en *straling [radiation]*. We beschouwen nu het tempo van energieverlies in de weerstand als een lading Q door de weerstand gaat:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\Delta V) = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V .$$

Hierbij is I de stroom in het circuit. Het systeem wint potentiële energie als de lading door de batterij gaat, ten koste van de chemische energie in de batterij. Het tempo waarin het systeem potentiële energie verliest als de lading door de batterij gaat is gelijk aan het tempo waarbij het systeem energie wint in de weerstand als interne energie. Als we het *vermogen [power]* \mathcal{P} gelijkstellen aan het tempo waarin energie aan de weerstand geleverd wordt geldt

$$\mathcal{P} = I\Delta V .$$

Dit resultaat geldt voor eender welk toestel met een stroom I en een potentiaalverschil ΔV tussen zijn uiteinden. Omdat we weten dat $\Delta V = IR$ voor een weerstand, geldt

$$\mathcal{P} = I\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R} .$$

Omdat de stroom I wordt uitgedrukt in ampère, het potentiaalverschil ΔV in volt en de weerstand R in ohm, wordt het vermogen \mathcal{P} uitgedrukt in *Watt* $W = J/s = kg \cdot m^2/s^3$.

Het proces waarbij vermogen verloren wordt als interne energie in een geleider met weerstand R noemen we *joule heating* of het I^2R verlies.

Als in het echte leven energie moet getransporteerd worden kunnen we de weerstand in de draden niet verwaarlozen. Nemen we bijvoorbeeld het energietransport van de energiecentrale naar het stopcontact bij ons thuis. Omwille van economische redenen zijn de elektriciteitsdraden niet van het dure koper gemaakt, maar van een goedkoper materiaal met een hogere weerstand R . Om het energieverlies zo klein mogelijk te houden moet ook gelden dat de stroom I zo klein mogelijk is. Uit deze twee voorwaarden volgt dat we de energie zullen transporteren met een enorm potentiaalverschil ΔV . Dit verklaart de naam hoogspanningskabels.

Hoofdstuk 28

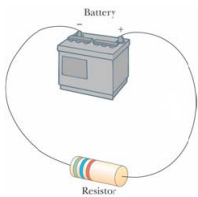
Gelijkstroomkringen

28 Direct Current Circuits, blz. 858-893

In dit hoofdstuk gaan we elektrische circuits bekijken met spanningsbronnen, weerstanden en capaciteiten. We veronderstellen dat de stroom constant is in grootte en in richting: *gelijkstroom* (DC).

28.1 Elektromotorische kracht (emf)

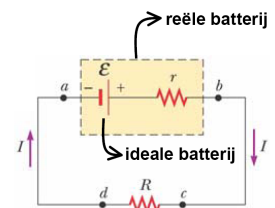
28.1 Electromotive Force, blz. 859-861



De *elektromotorische kracht* of *emf* ϵ van een batterij (= DC) is het maximale potentiaalverschil dat de batterij kan leveren tussen zijn twee polen. We noemen de batterij een emf-bron of ladingspomp. Deze naamgeving is eigenlijk een historische fout: de emf is geen kracht maar een potentiaalverschil.

De positieve pool van de batterij heeft altijd een hogere potentiaal dan de negatieve pool. Omdat een levensechte batterij gemaakt is van materialen, heeft deze ook een weerstand die we de *interne weerstand* r noemen. Deze interne weerstand vermindert de spanning over de polen van de batterij. Voor een ideale batterij geldt $r = 0$ en $\Delta V = \epsilon$

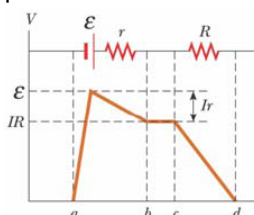
Om te begrijpen waarom het potentiaalverschil over de polen bij een echte batterij niet gelijk is aan ϵ beschouwen we het circuit in de figuur hiernaast. De batterij wordt voorgesteld door de gele rechthoek die een ideale weerstandsloze batterij bevat met emf ϵ die in serie staat met een interne weerstand r . Als een lading nu beweegt van de negatieve pool van de ideale batterij naar de positieve pool, dan krijgt deze lading meer potentiële energie.



Als de lading door de interne weerstand gaat, daalt de potentiële energie met een hoeveelheid Ir , waarbij gelijk is aan I de stroom in het circuit. Het uiteindelijk voltage van de batterij is gelijk aan

$$\Delta V = V_b - V_a = \epsilon - Ir .$$

Hierbij moeten we opmerken dat ϵ equivalent is met de open-kring spanning, dat is het uiteindelijke potentiaalverschil over de bron als de stroom gelijk is aan 0.



De figuur hiernaast is een grafische weergave van de veranderingen in elektrische potentiaal als we door het circuit gaan in wijzerzin. Uit de figuur hierboven volgt dat het uiteindelijk potentiaalverschil ΔV moet gelijk zijn aan het potentiaalverschil over de externe weerstand R die we de *belastingsweerstand* noemen. De externe weerstand is een belasting voor de batterij omdat de batterij energie moet leveren aan de weerstand.

Het potentiaalverschil over de belastingsweerstand is gelijk aan $\Delta V = IR$. Hieruit volgt dat

$$\epsilon = IR + Ir \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\epsilon}{R + r} .$$

Deze uitdrukking toont dat de stroom dit eenvoudige circuit afhangt van de belastingsweerstand R en van de interne weerstand r . Als R veel groter is dan r , zoals in vele dagdagelijkse situaties, kunnen we r negeren. Als we beide leden van de vergelijking met I vermenigvuldigen volgt dat

$$I\varepsilon = I^2R + I^2r .$$

Deze vergelijking duidt aan dat, omdat vermogen $\mathcal{P} = I\Delta V$, het totaal vermogen $I\varepsilon$ van de batterij verdeeld wordt over de weerstanden: I^2R wordt aan de externe belastingsweerstand geleverd, I^2r aan de interne weerstand.

Om het maximaal vermogen dat geleverd wordt aan de belastingsweerstand R te berekenen, moeten we het maximum voor I^2R zoeken. Dit maximum ligt bij $R = r$. Een grotere R gaat zorgen voor minder stroom in de kring, dus het vermogen I^2R zal dan kleiner zijn. Als we een kleinere R nemen is er meer stroom maar dan gaat veel vermogen naar de inwendige weerstand r .

28.2 Weerstanden in serie en parallel

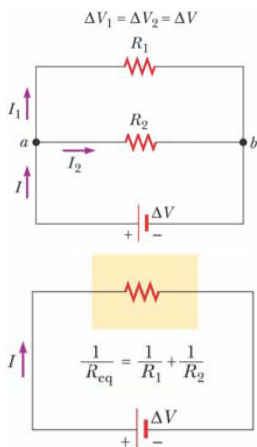
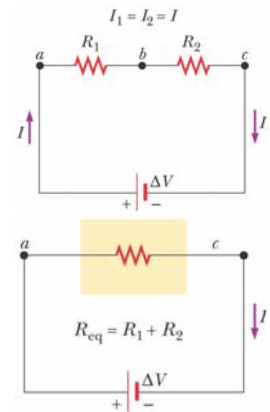
28.2 Resistors in Series and Parallel, blz. 862-869

Serieschakeling

Voor twee weerstanden R_1 en R_2 die serieel geschakeld zijn is de stroom die door de weerstanden gaat gelijk, immers de hoeveelheid ladingen die door R_1 gaan moeten ook door R_2 gaan in hetzelfde tijdsinterval.

Voor een aantal serieel geschakelde weerstanden R_i is de *equivalente weerstand* R_{eq} gelijk aan de som van de individuele weerstanden:

$$R_{eq} = \sum_i R_i .$$



Parallelschakeling

We beschouwen nu twee weerstanden R_1 en R_2 die parallel geschakeld zijn. Het punt a noemen we een *splitsing [junction]*. Omdat er geen ophoping of creatie van ladingen kan zijn in het punt a moet $I = I_1 + I_2$. Er geldt dat de potentiaalverschillen over de weerstanden gelijk moeten zijn.

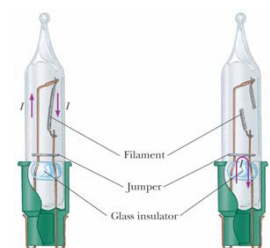
Voor een aantal parallel geschakelde weerstanden R_i is de inverse van *equivalente weerstand* R_{eq} gelijk aan de som van de inversen van de individuele weerstanden:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \Rightarrow \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Kerstverlichting: serie of parallel?

Als kerstlampjes in serie zouden staan, zou dat betekenen dat 1 kapotte lamp de hele kring uitschakelt. Om de kapotte lampje te vinden moet alle lampjes dan één voor één getest worden. Dit is natuurlijk niet ideaal. Alle kerstlampjes in parallel schakelen heeft dit nadeel niet, maar dan staan alle lampjes op dezelfde spanning. Hierdoor zullen de lampen helderder zijn, maar ze vormen ook een groter gevaar voor brand.

Men heeft daarom een nieuw systeem uitgevonden. Als het filament breekt, herstelt een 'jumper' de verbinding. De isolatie rond de jumper zal doorsmelten omdat het een grote weerstand heeft. Als het filament nog heel is zal er geen stroom langs de jumper lopen omdat de weerstand te groot is.



28.3 Regels van Kirchhoff

28.3 Kirchhoff's Rules, blz. 869-873

EERSTE REGEL VAN KIRCHHOFF: de som van de stromen die een vertakking binnenkomen moet gelijk zijn aan de som van de stromen die de vertakking verlaten. (Behoud van elektrische lading)

$$\sum I_{in} = \sum I_{uit}$$

TWEDE REGEL VAN KIRCHHOFF: de som van de potentiaalverschillen over alle elementen in een gesloten kring moet nul zijn. (Behoud van energie)

$$\sum_{\text{gesloten kring}} \Delta V = 0$$

Voor de tweede wet van Kirchhoff gebruiken we enkele conventies. Als de weerstand mee met de stroom staat georiënteerd (zodat we van een hogere naar een lagere potentiaal gaan) geldt $\Delta V = -IR$, als de weerstand tegen de stroom in staat georiënteerd (zodat we van een lagere naar een hogere potentiaal gaan) geldt $\Delta V = +IR$. Als een emf-bron van $-$ naar $+$ staat geldt $\Delta V = +\varepsilon$, als ze van $+$ naar $-$ staat geldt $\Delta V = -\varepsilon$.

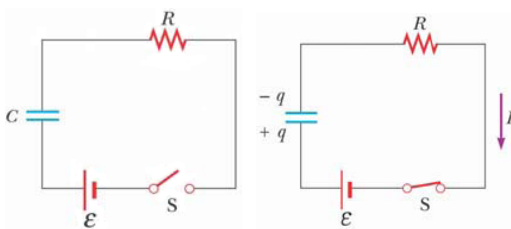
In de praktijk worden de regels van Kirchhoff als volgt toegepast: we beginnen met het tekenen van een diagram. Daarin benoemen we alle gekende en ongekende elementen, en we kiezen willekeurig een richting voor de stroom. Dan passen we de eerste regel van Kirchhoff toe op elke vertakking, en de tweede regel van Kirchhoff op elke gesloten kring waarbij we opletten voor het teken. De vergelijkingen die we hiermee bekomen kunnen we dan oplossen om de onbekenden te vinden.

28.4 RC-keten

28.4 RC Circuits, blz. 873-878

Tot nu toe hebben we DC-ketens altijd bestudeerd met constante stroom. Als een DC-keten een condensator bevat zal de stroom altijd in dezelfde richting lopen, maar de stroom kan in de tijd variëren in grootte. Een keten die een combinatie van weerstanden en condensatoren bevat noemen we een *RC-keten*.

Een condensator opladen met een weerstand



De figuren hiernaast tonen een eenvoudige RC-keten. We veronderstellen dat de condensator aanvankelijk niet geladen is. Omdat de schakelaar S openstaat is er ook geen stroom. We sluiten de schakelaar op $t = 0$, waardoor de ladingen beginnen te vloeien: er komt een stroom in het circuit en de condensator wordt opgeladen.

Hierbij moeten we opmerken dat tijdens de oplading geen ladingen over de condensator springen: er is een leegte tussen de twee platen. In plaats daarvan worden ladingen getransporteerd van de pool van de batterij door een geleidende draad naar de plaat van de condensator. Als de platen opgeladen zijn, is er een potentiaalverschil tussen de platen van de condensator. De maximum lading op de platen hangt af van de batterij. Eenmaal de maximum lading bereikt is, wordt de stroom in het circuit 0. Immers, het potentiaalverschil over de condensator is gelijk aan het potentiaalverschil van de batterij.

Uit de tweede wet van Kirchhoff, toegepast nadat het circuit gesloten wordt, volgt dat

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - IR = 0 \quad (28.1)$$

waarbij q/C gelijk is aan het potentiaalverschil over de condensator en IR het potentiaalverschil over de weerstand in het circuit. Uit (28.1) kunnen we de initiële stroom I_0 halen door $t = 0$ in te vullen: dan is de condensator nog niet geladen ($q = 0$) dus $I_0 = I_{max}$ en $I_0 = \varepsilon/R$. Op dat ogenblik staat het potentiaalverschil van de batterij volledig over de weerstand. Later, als de condensator geladen wordt tot zijn maximum lading Q , zullen er geen ladingen meer vloeien en zal de stroom 0 worden. Het potentiaalverschil van de batterij staat dan helemaal over de condensator. Door $I = 0$ in te vullen in (28.1) vinden we dat de maximum lading gelijk is aan $Q = C\varepsilon$. Omdat $I = dq/dt$ kunnen we (28.1) herschrijven als volgt:

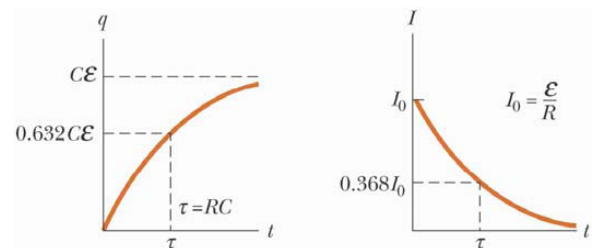
$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}.$$

Dit is een differentiaalvergelijking in q , die we kunnen oplossen met behulp van scheiding van veranderlijken. We krijgen volgende uitdrukkingen voor q en $I = dq/dt$:

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

De grootheid RC noemen we de *tijdsconstante* τ van het circuit. De tijdsconstante staat voor het tijdsinterval waarin de stroom verlaagt van I_0 tot I_0/e , en voor het tijdsinterval waarvoor de lading op de condensator verhoogt van 0 tot $C\varepsilon(1 - 1/e)$.



Uit onderstaande dimensie-analyse volgt dat τ in tijdseenheden wordt uitgedrukt:

$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{\Delta V}{I} \times \frac{Q}{\Delta V} \right] = \left[\frac{Q}{Q/\Delta t} \right] = [\Delta t] = T.$$

Als de condensator volledig opgeladen is zal de geleverde energie van de emf gelijk zijn aan

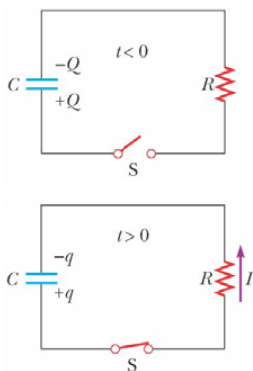
$$U_{emf} = \int_0^{U_{emf}} dU = \int_0^Q \varepsilon dq = \varepsilon \int_0^Q dq = \varepsilon Q \quad \Rightarrow \quad U_{emf} = Q\varepsilon = C\varepsilon^2.$$

De energie in de condensator zal dan gelijk zijn aan $\frac{Q\varepsilon}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2}$: exact de helft van de geleverde energie. De andere helft van de geleverde energie wordt in de weerstand opgeslagen als interne energie, immers

$$U_R = \int_0^{U_R} dU = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty I^2 R dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R^2} R e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{\varepsilon^2}{R} \frac{RC}{2} \left[e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty$$

dus $U_R = \varepsilon^2 C/2$.

Een condensator ontladen



We beschouwen nu een eenvoudig circuit zoals in de tekening hiernaast, waarbij we starten met een opgeladen condensator. Voor de schakelaar gesloten wordt staat er een potentiaalverschil Q/C over de condensator en geen potentiaalverschil over de weerstand omdat $I = 0$. We sluiten de schakelaar op $t = 0$, waardoor de condensator begint te ontladen doorheen de weerstand. Op een tijdstip t tijdens deze ontlading is de stroom gelijk aan I en de lading op de condensator gelijk aan q . Uit de tweede wet van Kirchhoff volgt dat $-IR - q/C = 0$. Door $I = dq/dt$ in te vullen in deze vergelijking krijgen we een differentiaalvergelijking die we kunnen oplossen met scheiding van veranderlijken, zodat geldt dat

$$q(t) = Q e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(Q e^{-\frac{t}{RC}} \right) = -\frac{Q}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Hoofdstuk 29

Magnetische velden

29 Magnetic Fields, blz. 894-925

HERHALING:

het *vectorproduct* $\vec{a} \times \vec{b}$ van twee vectoren \vec{a} en \vec{b} wordt gedefinieerd aan de hand van volgende 3 regels:

- $\vec{a} \times \vec{b}$ staat loodrecht op \vec{a} en \vec{b} ,
- \vec{a} , \vec{b} en $\vec{a} \times \vec{b}$ vormen een rechtshandig assenstelsel,
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ waarbij θ de kleinste hoek is tussen \vec{a} en \vec{b} .

We berekenen het vectorproduct van twee vectoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ en $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ als volgt

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x, a_y, a_z) \times (b_x, b_y, b_z) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z) e_x + (-a_x b_z + b_x a_z) e_y + (a_x b_y - b_x a_y) e_z \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)\end{aligned}$$

Enkele eigenschappen:

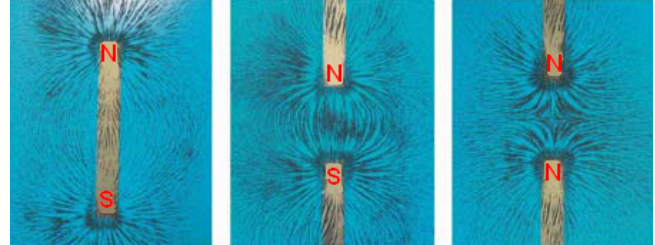
- De lengte van de vector $\vec{a} \times \vec{b}$ is gelijk aan de oppervlakte van het parallellogram met zijden \vec{a} en \vec{b} .
- \vec{a} en \vec{b} zijn evenwijdig als en slechts als $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- Identiteit van Jacobi: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Het vectorproduct in \mathbb{R}^3 blijft bewaard onder een isometrische lineaire transformatie, op het teken na. Oriëntatiebewarende isometrieën (zoals rotaties) bewaren het kruisproduct, oriëntatie-omkerende isometrieën (zoals spiegelingen) veranderen het kruisproduct in zijn tegengestelde.

29.1 Magnetische velden en krachten

29.1 Magnetic Fields and Forces, blz. 896-900

We weten al dat elke lading een elektrisch veld rondom zich veroorzaakt. Nu veroorzaakt een bewegende lading daarenboven ook een magnetisch veld. We gebruiken het symbool \vec{B} om het *magnetisch veld* aan te duiden, en analoog aan de elektrisch veldlijnen tekenen we ook *magnetische veldlijnen*.

We vinden magnetische polen altijd in paren: er is steeds een noord- en een zuidpool. We hebben nog nooit een magnetische monopool gevonden. Dit is het fundamentele verschil tussen magnetisme en elektriciteit. De magnetische veldlijnen lopen altijd van de noordpool naar de zuidpool.



We kunnen het magnetisch veld \vec{B} definiëren op een punt in de ruimte in termen van de magnetische kracht \vec{F}_B die het veld uitoefent op een deeltje in de ruimte. We veronderstellen dat dit deeltje, dat we het testobject noemen, een snelheid \vec{v} heeft. Voorlopig veronderstellen we dat er geen elektrische of gravitationele velden aanwezig zijn op de plaats van het testobject.

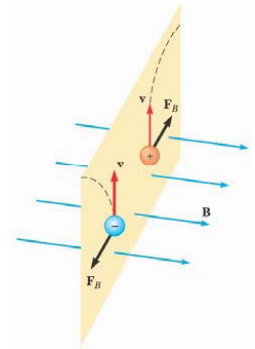
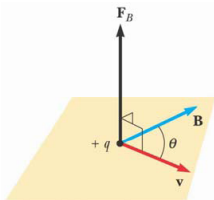
Experimenten hebben aangetoond dat

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{dus} \quad F_B = |q|vB \sin \theta ,$$

waarbij θ de kleinste hoek is tussen \vec{v} en \vec{B} .

De eenheid van het magnetisch veld \vec{B} is de *Tesla T* (of *Gauss G*):

$$1T = 1 \frac{N}{C \cdot m/s} = 1 \frac{N}{Am} = 10^4 G .$$



De tweede gelijkheid geldt omdat $1C/s = 1A$.

Een vergelijking:

Elektrische kracht $\vec{F}_E = q\vec{E}$	Magnetische kracht $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$
in de richting van het elektrisch veld	loodrecht op het magnetisch veld
werkt op eender welke lading	werkt enkel op bewegende ladingen
levert arbeid bij de verplaatsing van de lading	levert geen arbeid bij de verplaatsing van een lading

Het *work-kinetic energy theorem* zegt dat $\sum W = \Delta K$. Omdat de magnetische kracht geen arbeid levert bij de verplaatsing van een lading, immers $(\vec{F} \perp d\vec{s})$, volgt hieruit dat de kinetische energie van een bewegend geladen deeltje in een magnetisch veld niet kan gewijzigd worden door het magnetisch veld alleen. Met andere woorden: als een geladen deeltje door een magnetisch veld beweegt met snelheid \vec{v} , dan kan het magnetisch veld alleen de richting van de snelheidsvector en niet de grootte veranderen (en dus ook niet de kinetische energie van het deeltje).

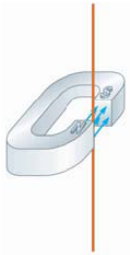
$$W = \vec{F}_B \cdot d\vec{s} = \vec{F}_B \cdot (\vec{v}dt) = (\vec{F}_B \cdot \vec{v})dt = 0 \quad (\vec{F} \perp \vec{v})$$

29.2 Magnetische kracht op een stroomvoerende draad

29.2 Magnetic Force Acting on a Current-Carrying Conductor, blz. 900-904

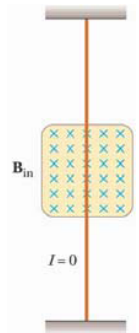
Als we \vec{B} willen tekenen zonder perspectief, zullen we een pijltje gebruiken als de vector in het vlak van het blad ligt. Als de vector uit het blad komt tekenen we een puntje, als de vector in het blad gaat tekenen we een kruisje.





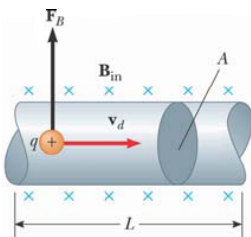
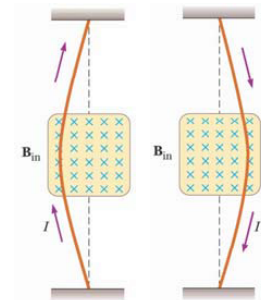
Omdat een stroomvoerende draad bestaat uit vele bewegende geladen deeltjes, die elkaar onderhevig zijn aan de magnetische kracht, zal de magnetische kracht ook inwerken op de stroomvoerende draad. Het resultaat zal gelijk zijn aan de vectorsom van de individuele krachten uitgevoerd op alle deeltjes die uitmaken van de stroom.

We kunnen de magnetische kracht die werkt op een stroomvoerende draad demonstreren met volgende proef: we hangen een draad tussen twee polen van een magneet, zoals in de figuur hiernaast. We stellen dit voor in 2D met de afgesproken notaties.



Experimenten tonen aan dat als de draad een stroom naar boven draagt, de draad zal afbuigen naar links. Als de draad een stroom naar beneden draagt, zal de draad afbuigen naar rechts.

Als de draad een lengte L heeft en een doorsnede A , en een stroom I draagt in een uniform magnetisch veld \vec{B} , kunnen we de situatie voorstellen zoals in de figuur hieronder.



De magnetische kracht op een lading q die een driftsnelheid \vec{v}_d heeft is gelijk aan $q\vec{v}_d \times \vec{B}$. Om de totale kracht die op de draad werkt te vinden, moeten we $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ vermenigvuldigen met het aantal ladingen in de draad. Omdat het volume van de draad gelijk is aan AL en n het aantal ladingen per volume-eenheid, is het totaal aantal ladingen gelijk aan nAL . De totale magnetische kracht op de draad is dus gelijk aan

$$\vec{F}_B = (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAL .$$

Omdat $I = nqv_dA$ geldt

$$\vec{F}_B = I(\vec{L} \times \vec{B})$$

waarbij \vec{L} de vector is die in de richting van de stroom I wijst met als grootte de lengte L van de draad.

Voor een willekeurig gevormde stroomvoerende draad is de magnetische kracht gelijk aan

$$\vec{F}_B = \int_a^b d\vec{F}_B = \int_a^b (I d\vec{s} \times \vec{B})$$

waarbij a en b begin- en eindpunt van de geleider voorstellen.

Als we werken in een uniform elektrisch veld \vec{B} geldt dat

$$\vec{F}_B = I \left(\int_a^b d\vec{s} \right) \times \vec{B} .$$

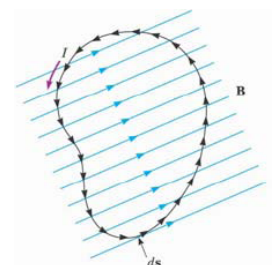
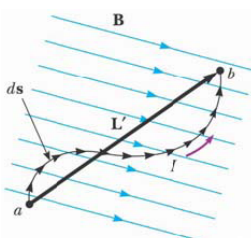
De integraal staat voor de vectorsom van alle lengte-segmenten van a tot b .

De som zal gelijk zijn aan $\vec{L}' = b - a$, zodat geldt dat

$$\vec{F}_B = I\vec{L}' \times \vec{B} .$$

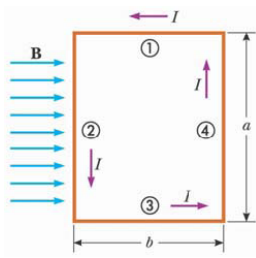
Als de stroomvoerende draad een gesloten kring vormt, geldt

$$\int_a^b d\vec{s} = \oint d\vec{s} = 0 \quad \text{dus} \quad \vec{F}_B = 0 .$$



29.3 Krachtenkoppel op een gesloten stroomvoerende geleider in een homogeen magnetisch veld

29.3 Torque on a Current Loop in a Uniform Magnetic Field, blz. 904-907

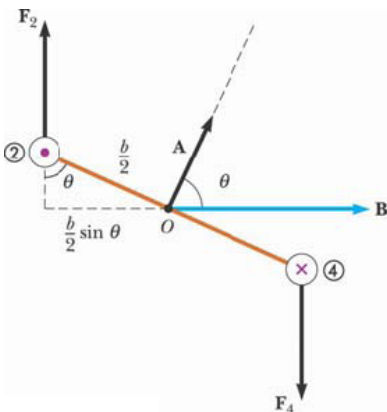
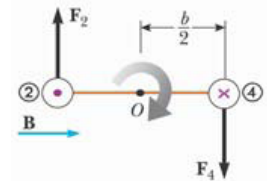


We beschouwen een rechthoekig kader waar stroom door loopt in een homogeen magnetisch veld dat evenwijdig is met het vlak van het kader. Op zijde 1 en 3 werkt geen magnetische kracht omdat de draden parallel lopen met het magnetisch veld en $\vec{L} \times \vec{B} = 0$. Op zijde 2 en 4 werkt wel een magnetische kracht met grootte $F_2 = F_4 = IaB$. De vector \vec{F}_2 komt uit het blad, de vector \vec{F}_4 gaat in het blad. De twee krachten wijzen dus in tegengestelde richtingen, maar ze liggen niet op elkaar verlengde.

Als het kader vastgemaakt wordt zodat het kan pivoteren rond het punt O , dan maken deze twee krachten samen een krachtmoment dat het kader in wijzerzin zal doen roteren. De grootte van dit krachtmoment τ_{max} is gelijk aan

$$\tau_{max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB) \frac{b}{2} + (IaB) \frac{b}{2} = IabB$$

waarbij de krachtarm rond O gelijk is aan $b/2$ voor elke kracht. Omdat het gebied binnen het kader gelijk is aan $A = ab$ geldt dus $\tau_{max} = IAB$. Dit resultaat geldt alleen als het vlak waarin de kader ligt evenwijdig is met het magnetisch veld. Als de stroomrichting wordt omgedraaid zullen ook de krachten tegengesteld worden en dan zal de kader in tegenwijzerzin beginnen draaien.



We veronderstellen nu dat het homogeen magnetisch veld een hoek $\theta < 90^\circ$ maakt met een loodlijn op het vlak waarin de kader ligt, en dat de zijden 2 en 4 nog altijd loodrecht op het magnetisch veld staan. In dat geval doen \vec{F}_1 en \vec{F}_3 elkaar teniet zodat ze geen krachtmoment veroorzaken. De krachten \vec{F}_2 en \vec{F}_4 produceren een krachtmoment voor elk punt. We krijgen dan de situatie in de figuur hiernaast. De krachtarm tot O is dan voor beide krachten gelijk aan $b/2 \sin \theta$. Omdat $F_2 = F_4 = IaB$ is de grootte van het netto krachtmoment τ rond O gelijk aan:

$$\begin{aligned} \tau &= F_2 \frac{b}{2} \sin \theta + F_4 \frac{b}{2} \sin \theta = IaB \left(\frac{b}{2} \sin \theta \right) + IaB \left(\frac{b}{2} \sin \theta \right) \\ &= IabB \sin \theta = IAB \sin \theta \end{aligned}$$

Als we \vec{A} gelijk stellen aan de vector met als richting de richting van de normaal op het kader en met als grootte de oppervlakte van het kader, dan geldt

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}.$$

We definiëren het *magnetisch dipoolmoment* $\mu = I\vec{A}$, met als eenheid $A \cdot m^2$. We kunnen het krachtmoment op het stroomvoerende kader (met N windingen) nu als volgt schrijven:

$$\vec{\tau} = \mu_{spool} \times \vec{B} = N\mu_{loop} \times \vec{B}.$$

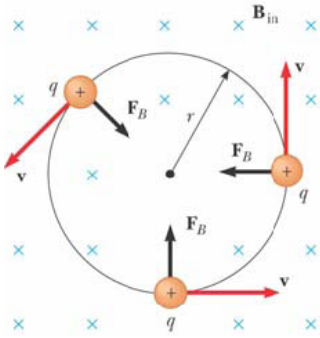


Hoewel we deze formule hebben afgeleid voor een rechthoekig kader, geldt dit voor eender welke spool. We vestigen hier wat aandacht op de analogie met het elektrisch dipoolmoment in een elektrisch veld: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$. Ook de potentiële energie van een magnetisch dipoolmoment in een magnetische veld is analoog aan de potentiële energie van een elektrisch dipoolmoment in een elektrisch veld: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ en $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. Er geldt ook $U_{min} = -\mu B$ en $U_{max} = +\mu B$.

29.4 Beweging van een geladen deeltje in een magnetisch veld

29.4 Motion of a Charged Particle in a Uniform Magnetic Field, blz. 907-910

We weten al dat de magnetische kracht die werkt op een geladen deeltje dat beweegt in een magnetisch veld loodrecht staat op de snelheidsvector van dat deeltje. De arbeid geleverd door de magnetische kracht is dan ook 0.



We beschouwen het speciale geval waarbij een positief geladen deeltje beweegt in een uniform magnetisch veld, en met beginsnelheid loodrecht op het magnetisch veld. Ook als het deeltje van richting of van snelheid verandert ten gevolge van de magnetische kracht, zal de magnetische kracht loodrecht blijven staan op de snelheidsvector. Omdat de kracht altijd loodrecht op de snelheid staat, zal het deeltje een cirkel beschrijven.

Het deeltje beweegt in een cirkel met straal r omdat $\vec{F}_B \perp \vec{v}$ en $\vec{F}_B \perp \vec{B}$ en omdat $F_B = qvB$ constant is. Voor de nettokracht \vec{F} die de centripetale versnelling veroorzaakt geldt $\sum F = ma_c = \frac{mv^2}{r}$, dus in dit geval geldt

$$F_B = qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \text{dus} \quad r = \frac{mv}{qB}.$$

We zien dus r evenredig is met de impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ van het deeltje en omgekeerd evenredig met de grootte van de lading van het deeltje en met de grootte van het magnetisch veld. De pulsatie of hoeksnelheid [angular speed] ω of cyclotronfrequentie van het deeltje is gelijk aan

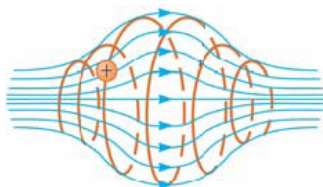
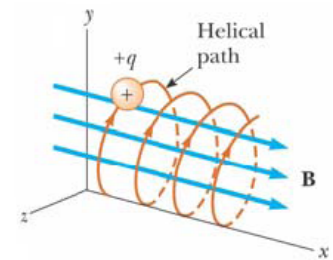
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}.$$

De periode [period of motion] T is gelijk aan de omtrek van de cirkel gedeeld door de lineaire snelheid van het deeltje:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

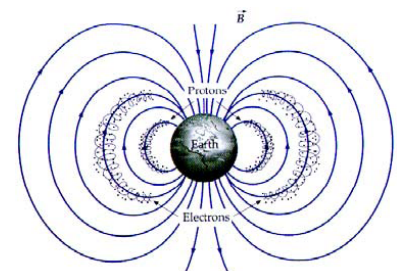
Zowel de pulsatie als de periode zijn dus onafhankelijk van de snelheid van het deeltje en van de straal van de cirkel.

Als een geladen deeltje in een uniform magnetisch veld beweegt, waarbij zijn snelheidscomponent een component heeft in de richting van \vec{B} , beschrijft dit deeltje een helix of spiraal.



Als een geladen deeltje beweegt in een niet-uniform magnetisch veld is de beweging veel complexer. In de figuur hiernaast zien we een magnetische fles die haar naamgeving dankt aan het feit dat ze geladen deeltjes kan gevangen houden.

De Van Allen belts zijn banen tussen de magnetische noord- en zuidpool die geladen deeltjes bevatten. Deze deeltjes zijn voornamelijk protonen en elektronen die allen gevangen zitten in het magnetisch veld van de aarde. De deeltjes volgen een spiraalvormige baan rond de veldlijnen van pool naar pool, en ze leggen deze afstand af in slechts enkele seconden. Sommige van de deeltjes botsen met lucht moleculen als ze aan de polen in aanraking komen met onze atmosfeer, waardoor ze licht uitstralen: het Noorderlicht.



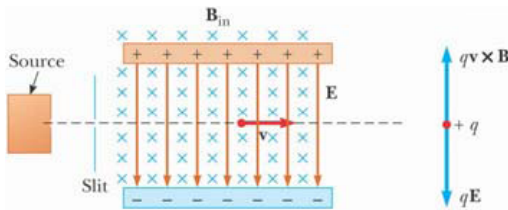
29.5 Toepassingen van geladen deeltjes die in elektrische en magnetische velden bewegen

29.5 Applications Involving Charged Particles Moving in a Magnetic Field, blz. 910-914

Een lading die beweegt met een snelheid \vec{v} in de aanwezigheid van zowel een elektrisch veld \vec{E} als een magnetisch veld \vec{B} ondervindt zowel een elektrische kracht $q\vec{E}$ als een magnetische kracht $q\vec{v} \times \vec{B}$. De totale kracht noemen we de *Lorentzkracht* en is gelijk aan

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} .$$

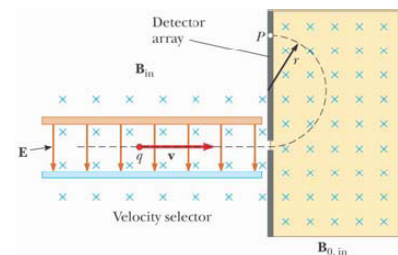
Snelheidsfilter of Wienfilter



In veel experimenten is het noodzakelijk dat alle geladen deeltjes met dezelfde snelheid bewegen. Dit kunnen we bekomen met een combinatie van een elektrisch en een magnetisch veld zoals in de figuur hiernaast. We zorgen ervoor dat $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{B} \perp \vec{v}$ en $\vec{v} \perp \vec{E}$, en we kiezen E en B zodat $qE = qvB$. Dan geldt $v = E/B$.

Massaspectrometer

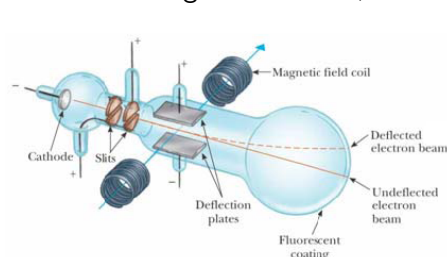
Een *massaspectrometer* scheidt ionen afhankelijk van hun massa-lading verhouding. In een 'Bainbridge massaspectrometer' moet een bundel ionen eerst door een snelheidsfilter en dan door een tweede uniform magnetisch veld \vec{B}_0 met dezelfde richting als het magnetisch veld van de snelheidsfilter. Als de ionen in het tweede magnetisch veld komen zullen de ionen in een halve cirkel met straal r bewegen. Afhankelijk van het teken van hun lading zullen ze naar boven of naar onder afbuigen.



Uit de formules voor de beweging van een lading in een uniform magnetisch veld weten we dat $\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$. We weten dat de ionen pas uit de snelheidsfilter komen, dus $v = E/B$. Hieruit volgt dat

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E} .$$

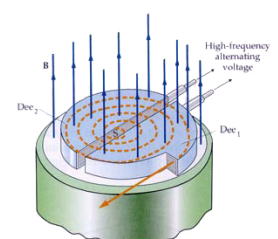
Dus als we de grootte van E , B en B_0 kennen en de straal r opmeten, kunnen we m/q bepalen.



Een variatie op deze techniek werkt gebruikt voor de ontdekking van het elektron en voor het opmeten van e/m_e . Men legt een elektrisch en een magnetisch veld aan die loodrecht op elkaar staan, en men configureert de opstelling zodat de elektronenstraal niet afwijkt van zijn rechte baan. Als we dan het magnetisch veld weglaten zal de straal afwijken, en die afwijking kunnen we opmeten. Vanuit E , B en de afwijking kan de massa-lading verhouding berekend worden.

cyclotron

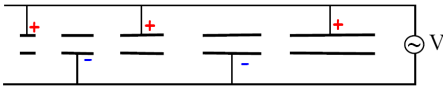
Een *cyclotron* is een toestel dat lading kan versnellen tot zeer hoge snelheden die gebruikt worden bij nucleaire processen en bij radioactieve therapieën. De ladingen bewegen in twee halve schijven met straal R die aangesloten zijn op een bron met wisseling potentiaalverschil en met een magnetisch veld er loodrecht op. Een positief ion wordt losgelaten nabij het centrum van één van de halve schijven, waardoor het daarin een halve cirkel gaat beschrijven in een tijdsinterval $T/2$, waarbij T het tijdsinterval is dat nodig is om een complete cirkel te beschrijven.



Als de lading terug in de spleet tussen de twee schijven komt verandert de polariteit van de halve schijven waardoor het versnelt. Omdat de versnelling groter is zal het ion nu een grotere halve cirkel beschrijven in de andere schijf. Na elk tijdsinterval $T/2$, op het ogenblik dat het ion in de spleet komt, verandert de polariteit zodat het ion versnelt. Na elke halve cirkel wint het elektron een kinetische energie ter waarde van $q\Delta V$. Uiteindelijk verlaat het ion de schijven met een snelheid $v = qBR/m$ (dit halen we uit de beweging van een geladen deeltje in een uniform elektrisch veld). Hieruit volgt dat de kinetische energie gelijk is aan

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}.$$

lineaire versneller



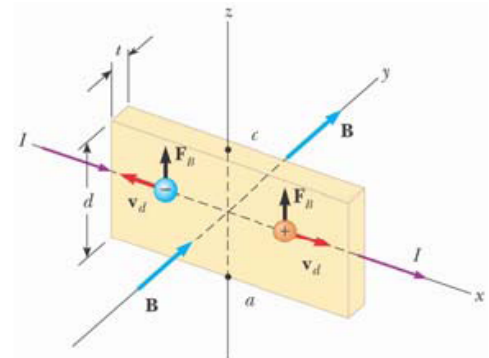
Een lineaire versneller werkt met een constante frequentie en zonder magneetveld, maar met een wisselend elektrisch veld. Een geladen deeltje wordt door holle geleidende cilinders gestuurd die afwisselend een positieve of een negatieve potentiaal hebben.

29.6 Het Hall effect

29.6 The Hall Effect, blz. 914-916

Als een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld wordt geplaatst, dan krijgt deze een potentiaalverschil in een richting loodrecht op de stroom en loodrecht op het magnetisch veld. Dit effect noemen we het *Hall effect*, en het geeft ons meer informatie over het teken van de ladingsdragers en van hun dichtheid en het kan ook gebruikt worden om de grootte van een magnetisch veld te berekenen.

We gebruiken een platte geleider met dikte t (in de y -richting) en hoogte d (in de z -richting) die een stroom I draagt in de x -richting. Een uniform magnetisch veld \vec{B} ligt in de y -richting. Als de ladingsdragers elektronen zijn die in de negatieve x -richting bewegen met driftsnelheid \vec{v}_d , dan ondervinden ze een opwaartse magnetische kracht $\vec{F}_B = q\vec{v}_d \times \vec{B}$ zodat ze naar boven buigen. De elektronen komen samen op de bovenste rand van de geleider, zodat de geleider een negatief geladen bovenkant krijgt. Deze veroorzaakt een elektrisch veld in de geleider dat zal groeien zolang de elektrische kracht op de overblijvende ladingsdragers niet gecompenseerd wordt door de magnetische kracht.



Als dit evenwicht bereikt wordt, zullen de elektronen niet meer afbuigen. Een gevoelige voltmeter of potentiaalmeter over de geleider kan het potentiaalverschil dat we de *elektrische spanning van Hall* [Hall voltage] ΔV_H noemen meten.

Een positieve lading die beweegt in de positieve x -richting ondervindt ook een opwaartse kracht die een positieve bovenkant van de geleider veroorzaakt. De elektrische spanning van Hall zal dan een tegengesteld teken hebben. We kunnen het teken van de ladingsdragers dus bepalen door de elektrische spanning van Hall op te meten.

De magnetische kracht die werkt op de ladingsdragers heeft grootte $qv_d B$. In de evenwichtssituatie moet dit gelijk zijn aan de elektrische kracht qE_H waarbij E_H het *elektrisch veld van Hall* [Hall field] is. Omdat $qv_d B = qE_H$ geldt $E_H = v_d B$, en $\Delta V_H = E_H d = v_d B d$. Als we de dichtheid van de ladingsdragers n kennen, kennen we ook de driftsnelheid $v_d = \frac{I}{nqA}$ (dit weten we uit het microscopisch model voor stroom). Omdat $A = td$ volgt hieruit dat

$$\Delta V_H = \frac{IBd}{nqA} = \frac{IB}{nqt} = \frac{R_H IB}{t}.$$

Hiervoor definiëren we de *Hall coëfficiënt* $R_H = 1/nq$.

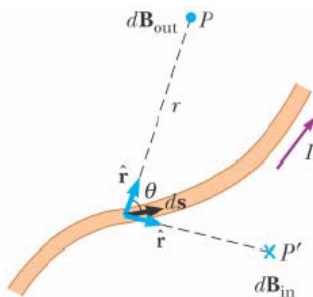
Hoofdstuk 30

Bronnen van magnetische velden

30 Sources of the Magnetic Field, blz. 926-966

30.1 de wet van Biot-Savart

30.1 The Biot-Savart Law, blz. 927-932



Door experimenten hebben we het verband afgeleid tussen het magnetisch veld \vec{B} opgewekt door een stroomvoerende geleider met stroom I . Dit verband noemen we de *wet van Biot-Savart*:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

met de *magnetische permeabiliteit van vacuüm* $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Tm/A}$.

Het veld $d\vec{B}$ is gelijk aan het magnetisch veld in een punt op afstand r van een stukje $d\vec{s}$ van de geleider. Het totale magnetisch veld \vec{B} is gelijk aan

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

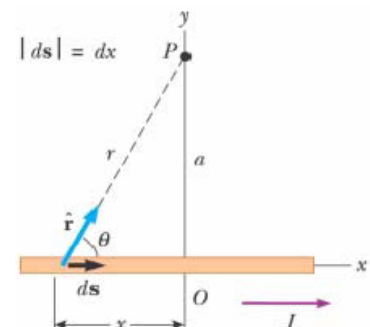
waarbij de integraal moet genomen worden over de totale stroomvoerende geleider. We moeten wel oppassen bij het integreren, want de integrand is een vectorproduct en dus een vectoriële grootheid.

Een vergelijking:

	Elektrisch veld	Magnetisch veld
bron	elektrische lading	bewegende elektrische lading (geen monopolen!)
afstandsafhankelijk	evenredig met $1/r^2$	evenredig met $1/r^2$
begin-einde veldvector	begin: een positieve lading einde: een negatieve lading	vormt steeds een lus (geen begin en geen einde)

Voorbeeld: magnetisch veld langs een lange, dunne geleider

We beschouwen een dunne, rechte draad met een stroom I die we op de x -as plaatsen zoals in de figuur hiernaast. We willen de grootte en de richting van het magnetisch veld ten gevolge van deze geleider in een punt P bepalen. Voor de richting gebruiken we de rechterhand regel: we nemen de geleider vast met ons rechterhand zodat onze duim in de richting van de stroom wijst. Onze vingers tonen dan het magnetisch veld rond de geleider. In dit geval geldt voor ons punt P dat \vec{B} altijd uit ons blad komt, voor eender welk stukje $d\vec{s}$ van de geleider.



We leggen de oorsprong van ons assenstelsel in O zodat P op de positieve y -as ligt op een hoogte a , en we stellen \hat{k} gelijk aan de eenheidsvector van de positieve y -as. Er geldt dus

$$d\vec{s} \times \hat{r} = |d\vec{s} \times \hat{r}| \hat{k} = (dx \sin \theta) \hat{k}.$$

De laatste gelijkheid geldt omdat $|d\vec{s}| = dx$ en $|\hat{r}| = 1$. We vullen dit in in de wet van Biot-Savart en bekomen dat

$$d\vec{B} = (dB)\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} \hat{k} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2}.$$

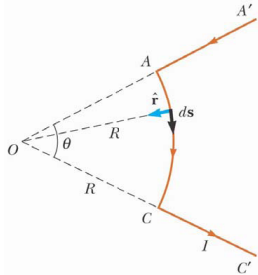
Om te kunnen integreren over deze uitdrukking moeten we x en r uitdrukken in termen van θ :

$$r = \frac{a}{\sin \theta} \quad x = -a \cot \theta \quad \text{dus} \quad dx = \frac{-a d\theta}{\sin^2 \theta}.$$

We vullen dit in en bekomen $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\frac{-a d\theta}{\sin^2 \theta} \sin \theta}{\left(\frac{a}{\sin \theta}\right)^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \theta d\theta$. Deze uitdrukking heeft als enige variabele θ , waarover we nu kunnen integreren:

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Voor een oneindig lange geleider geldt $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$.



Voorbeeld: magnetisch veld van een cirkelsegment in de oorsprong

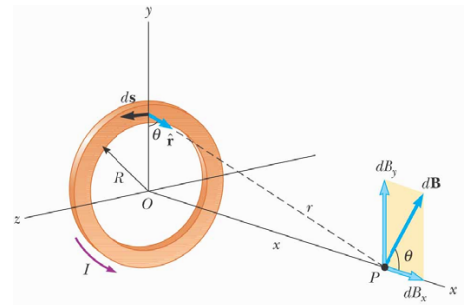
De stukken AA' en CC' dragen niet bij tot het magnetisch veld omdat ze evenwijdig zijn met \hat{r} dus $d\vec{s} \times \hat{r} = 0$. Op het cirkelsegment geldt altijd dat $d\vec{s} \perp \hat{r}$ dus $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds$. Hieruit volgt dat

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{R^2} \quad \text{dus} \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \theta.$$

Voorbeeld: magnetisch veld op de as van een circulaire stroomvoerende geleider

We nemen een circulaire geleider met straal R die in het yz -vlak ligt en die een stroom I draagt. We willen het magnetisch veld berekenen op een punt P op de as door het middelpunt van de geleider op een afstand x van de oorsprong. In deze situatie staat $d\vec{s}$ altijd loodrecht op \hat{r} dus geldt voor elk element dat $|d\vec{s} \times \hat{r}| = ds$. Alle lengte-elementen hebben ook dezelfde afstand tot het punt P , namelijk $r = \sqrt{x^2 + R^2}$. De grootte van het magnetisch veld van een element is dus gelijk aan

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\vec{s} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{(x^2 + R^2)}.$$



Verder moet $d\vec{B}$ loodrecht staan op \hat{r} en op $d\vec{s}$. We kunnen $d\vec{B}$ opdelen in een component $d\vec{B}_x$ volgens de x -as en een component $d\vec{B}_y$ loodrecht op de x -as. Er zal gelden dat $\vec{B}_y = \oint d\vec{B}_y = 0$ omdat alle y -componenten elkaar zullen opheffen. De x -componenten zullen elkaar versterken, immers

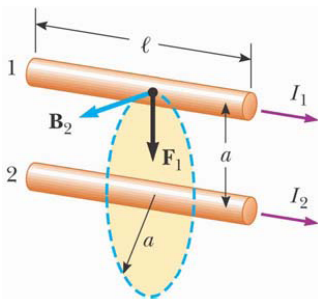
$$B_x = \oint dB_x = \oint dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds \cos \theta}{(x^2 + R^2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds \left(R / \sqrt{x^2 + R^2} \right)}{(x^2 + R^2)} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} \oint ds.$$

Hieruit volgt dat $\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_x$ voor een punt P op de as, en in O geldt dat $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_x$.

Als we het magnetisch veld van een dipool op verre afstand bekijken ($x \gg R$) geldt $B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{x^3}$ met $\mu = I \cdot A$ het magnetisch dipoolmoment.

30.2 Magnetische kracht tussen twee stroomvoerende geleiders

30.2 The Magnetic Force Between Two Parallel Conductors, blz. 932-933



We beschouwen twee lange, rechte, parallelle draden die op een afstand a van elkaar liggen en die een stroom I_1 en I_2 dragen in dezelfde richting. We gaan berekenen welke kracht draad 2 met stroom I_2 uitoefent op draad 1, door het aanleggen van een magnetisch veld \vec{B}_2 . De richting van \vec{B}_2 is loodrecht op draad 1. De magnetische kracht op een lengte l van draad 1 is gelijk aan $\vec{F}_1 = I_1 \vec{l} \times \vec{B}_2$ dus \vec{F}_1 wijst richting draad 2. Omdat l en \vec{B}_2 in dit geval loodrecht op elkaar staan geldt

$$F_1 = I_1 l B_2 = I_1 l \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l .$$

Analoog geldt $\vec{F}_2 = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1$ en $F_2 = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi a} l$.

Parallelle geleiders die een stroom dragen in dezelfde richting zullen elkaar dus aantrekken, parallelle geleiders die een stroom dragen in tegengestelde richting zullen elkaar dus afstoten. Omdat de grootte van de krachten \vec{F}_1 en \vec{F}_2 gelijk zijn, zullen we deze noteren als F_B . We herschrijven de grootte van de magnetische kracht nu per lengte-eenheid:

$$\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} .$$

Als we twee lange parallelle geleiders met identieke stroom op 1m van elkaar hangen, en ze oefenen een kracht per lengte-eenheid van $2 \cdot 10^{-7} N/m$ uit op elkaar, dan definiëren we de stroom in de elke draad als 1 Ampère A.

Als een geleider een constante stroom van 1A draagt, dan is de hoeveelheid lading die door een doorsnede van de geleider vloeit in 1 seconde gelijk aan 1 Coulomb C.

Om de potentiële energie van twee evenwijdige, lange stroomvoerende geleiders te berekenen zetten we de eerste draad vast op $x = 1$ en laten we de tweede draad variëren zodat deze op een afstand x van de eerste staat. Dan geldt $\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi x} \vec{u}_x$ dus $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{x} = F dx$. We kiezen $U_0 = 0$ voor $x = 1$, dan geldt

$$U = \int_1^x \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \ln(x) .$$

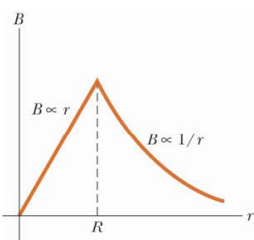
30.3 de Wet van Ampère

30.3 Ampère's Law, blz. 933-938

De wet van Ampère zegt dat de lijnintegraal van $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ over een gesloten pad gelijk is aan $\mu_0 I$, waarbij I de totale constante stroom is die door het een oppervlak gaat met als grens het gesloten pad.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

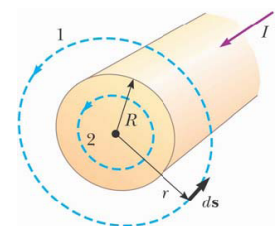
Voorbeeld: magnetisch veld in een lange stroomvoerende geleider



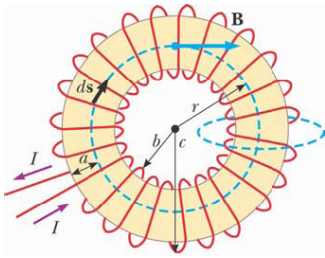
We nemen een lange stroomvoerende geleider met straal R en een homogene stroomdichtheid $J = \frac{I}{\pi R^2}$. Uit de wet van Ampère volgt dan dat

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (r \leq R)$$



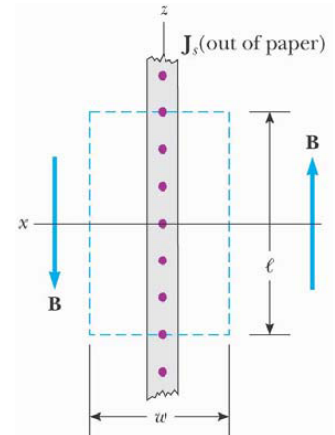
Voorbeeld: magnetisch veld in een torus



We beschouwen een torus met N wikkelingen waardoor een stroom I vloeit met binnenstraal b en buitenstraal c . De totale stroom door de cirkel met straal r ($b \leq r \leq c$) is gelijk aan IN . Uit de wet van Ampère volgt dan dat $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ voor $b \leq r \leq c$. Het magnetisch veld binnen ($r \leq b$) en buiten ($r \geq c$) de torus is niet gelijk aan 0, want als we een oppervlak nemen dat de torus doorsnijdt zoals rechts in de figuur dan loopt er een kleine stroom door het oppervlak. Er geldt echter wel dat $\oint \vec{B} d\vec{s} = 0$ omdat $I_{netto} = 0$.

Voorbeeld: magnetisch veld ten gevolge van een stroomvoerend vlak

We beschouwen het dunne, oneindig grote yz -vlak dat een lading draagt met lineaire stroomdichtheid \vec{J}_s . De stroom vloeit in de y -richting en J_s is gelijk aan de stroom per lengte-eenheid gemeten over de z -as. Om het magnetisch veld in de buurt van het vlak te berekenen, beschouwen we een rechthoekig pad door het vlak zoals in de figuur. De rechthoek heeft dimensies l en w , en zijn zijden zijn parallel met het vlak. De netto stroom door het stuk van het vlak dat in het rechthoekig pad ligt is gelijk aan $J_s l$. Als we de wet van Ampère hierop toepassen merken we op dat de zijden met lengte w geen invloed hebben op de lijnintegraal omdat de component van \vec{B} in deze richting gelijk is aan 0.



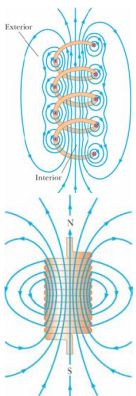
Door symmetrie is het magnetisch veld constant langs de zijden met lengte l , immers elk punt van het vlak is equivalent dus het magnetisch veld mag niet variëren van punt tot punt. De enige keuze over de richting van het magnetisch veld die we moeten maken is loodrecht op of parallel met het vlak. Een veld loodrecht op het vlak zou door de stroom gaan, en dat is inconsistent met de wet van Biot-Savart. Als we veronderstellen dat het veld constant is in grootte en parallel met het vlak dan geldt

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \mu_0 I = \mu_0 J_s l \\ 2Bl &= \mu_0 J_s l \\ B &= \mu_0 \frac{J_s}{2} \end{aligned}$$

Dit resultaat toont aan dat het magnetisch veld onafhankelijk is van de afstand tot het vlak.

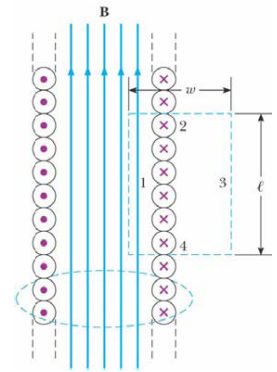
30.4 Magnetisch veld van een spoel of solenoïde

30.4 The Magnetic Field of a Solenoid, blz. 938-940



Een *spoel* of *solenoid*e is een lange draad in de vorm van een helix of spiraal. Een spoel zorgt voor een redelijk uniform magnetische veld binnen de spoel als er stroom door de spoel loopt. Een spoel met veel windingen heeft dezelfde eigenschappen als een staafmagneet, we kunnen zelfs een noord- en een zuidpool toekennen aan de spoel. Een ideale spoel heeft windingen die dicht op elkaar zitten en de lengte van de spoel is veel groter dan de straal. In dat geval is het magnetisch veld buiten de spoel bijna 0 en het magnetisch veld binnen de spoel uniform.

We beschouwen een ideale spoel, dus \vec{B} in de spoel zal uniform zijn en parallel met de as van de spoel. De magnetische veldlijnen buiten de spoel vormen cirkels rond de spoel in vlakken loodrecht op de spoel. We kiezen een rechthoekig pad met lengte l en breedte w zoals in de figuur. We passen hier de wet van Ampère toe door $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ te evalueren voor elke zijde van de rechtoek. Omdat de magnetische veldlijnen loodrecht op zijde 3 staan, heeft deze zijde geen bijdrage. Voor zijde 2 en zijde 4 staat het magnetische veld \vec{B} ook loodrecht op de verplaatsing $d\vec{s}$ over deze zijden, dus hun bijdrage is ook 0. Zijde 1 heeft wel een bijdrage omdat daar \vec{B} en $d\vec{s}$ parallel zijn. De integraal over het gesloten rechthoekig pad is dus gelijk aan



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{zijde1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_{zijde1} ds = Bl .$$

De totale stroom door het rechthoekig gebied is gelijk aan NI , waarbij N het aantal windingen in de lengte l is. De wet van Ampère zegt dan dat

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl = \mu_0 NI \quad \text{dus} \quad B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$$

waarbij $n = N/l$ het aantal windingen per lengte-eenheid. Deze vergelijking is alleen geldig voor punten die ver van de uiteinden van de spoel liggen.

We konden hetzelfde resultaat bekomen door onze kennis over het magnetisch veld van een torus te gebruiken. Als de straal van de torus met N windingen veel groter is dan de straal van de doorsnede van de torus a , dan kunnen we een klein stukje van de torus benaderen als een spoel met $n = N/2\pi r$.

30.5 Magnetische flux

30.5 Magnetic Flux, blz. 940-941

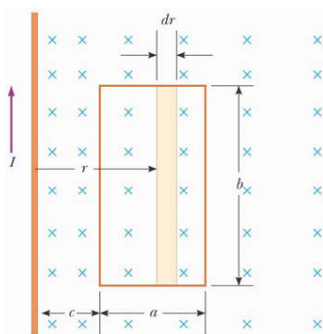
We beschouwen een element met oppervlakte dA op een willekeurig gevormd oppervlak. Als het magnetisch veld op dat element gelijk is aan \vec{B} , dan is de magnetische flux voor dat element gelijk aan $\vec{B} \cdot d\vec{A}$, waarbij $d\vec{A}$ een vector is met grootte dA en in de richting van de normaal op het oppervlak. De totale *magnetische flux* door het oppervlak is gelijk aan

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} .$$

Als we het speciale geval bekijken waar het oppervlak een vlak is en het magnetisch veld \vec{B} uniform, met θ de hoek tussen \vec{B} en $d\vec{A}$ dan is de magnetische flux gelijk aan $\Phi_B = BA \cos \theta$.

De eenheid van de magnetische flux is de *weber* $Wb = T \cdot m^2$.

Voorbeeld: magnetische flux door een rechthoekig kader



We beschouwen een rechthoekig kader met breedte a en lengte b op een afstand c van een lange draad met daarop een stroom I . De draad is evenwijdig met de langste zijde van het kader. We weten dat de grootte van het magnetisch veld van de stroomvoerende geleider op een afstand r van de geleider gelijk is aan $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Omdat \vec{B} evenwijdig loopt met $d\vec{A}$ voor elk punt van het kader, is de magnetische flux door een oppervlakte-element dA gelijk aan

$$\Phi_B = \int B dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA .$$

Omdat $dA = b dr$ geldt $\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{c}\right)$. Als we het kader heel ver weg brengen van de stroomvoerende geleider wordt de magnetische flux 0.

30.6 de wet van Gauss voor magnetische velden

30.6 Gauss's Law in Magnetism, blz. 941-942

De wet van Gauss voor magnetische velden zegt dat de netto magnetische flux door een gesloten oppervlak altijd nul moet zijn:

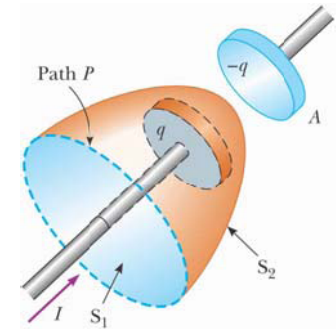
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 .$$

30.7 Verplaatsingstroom en de algemene vorm van de wet van Ampère

30.7 Displacement Current and the General Form of Ampère's Law, blz. 942-944

De wet van Ampère is alleen geldig voor systeem waar alle elektrische velden constant zijn in de tijd.

Immers, als we de condensator in de figuur hiernaast bekijken met het pad P en de twee oppervlakken S_1 en S_2 krijgen we een contradictie. Als we P beschouwen als de grens van het oppervlak S_1 geldt $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$ omdat de stroom in de geleider door het oppervlak S_1 gaat. Als we P beschouwen als de grens van het oppervlak S_2 geldt $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ omdat de stroom in de geleider niet door S_2 gaat.



Om deze contradictie op te lossen definiëren we de *verplaatsingstroom* I_d :

$$I_d \equiv \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

waarbij ε de permitiviteit van vacuüm is en $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ de elektrische flux. Als we de condensator opladen of ontladen kunnen we het veranderend elektrisch veld tussen de platen beschouwen als een equivalent van een stroom in een draad die de twee platen verbindt. De *algemene vorm van de wet van Ampère* of de *wet van Ampère-Maxwell* is dan

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} .$$

We mogen besluiten dat magnetische velden worden opgewekt door bewegende elektrische ladingen en door in de tijd variërende elektrische velden.

30.8 Magnetische materialen

30.8 Magnetism in Matter, blz. 944-953

Het magnetisch moment van een atoom

In het klassieke model van het atoom bewegen elektronen in cirkelbanen rond een kern. De bewegende elektronen veroorzaken een kleine stroom en we associëren het magnetisch moment van het elektron met deze rondtoerende beweging. In dit klassiek model veronderstellen we ook dat de elektronen bewegen met een constante snelheid v in een cirkelbaan met straal r rond de kern. Omdat het elektron een afstand $2\pi r$ aflegt in een tijdsinterval T is $v = 2\pi r/T$. De stroom I die hieraan geassocieerd wordt is gelijk aan e/T . Omdat $T = 2\pi/\omega$ en $\omega = v/r$ geldt

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r} .$$

De grootte van het *magnetisch moment* $\vec{\mu}$ geassocieerd met deze stroom is $\mu = IA$ waarbij $A = \pi r^2$ het oppervlak is dat begrensd wordt door de baan van het elektron. Hieruit volgt dat

$$\mu = IA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right) \pi r^2 = \frac{evr}{2}.$$

Omdat de grootte van het *orbitaal magnetisch moment* [orbital angular momentum] van het elektron gelijk is aan $L = l_e v r$ kan het magnetisch moment geschreven worden als volgt:

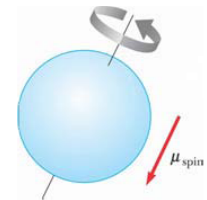
$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right) L.$$

Dit demonstreert dat het magnetisch moment van een elektron evenredig is met zijn impulsmoment. Omdat het elektron negatief geladen is, zullen $\vec{\mu}$ en \vec{L} in tegengestelde richtingen wijzen. Allebei staan ze loodrecht op het vlak waarin het elektron zijn baan beschrijft.

Uit de kwantumfysica halen we dat het orbitaal magnetisch moment gekwantiseerd is: $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ met $l = 0, 1, 2, \dots$ en de *constante van Planck* $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Bij atomen met veel elektronen hebben de orbitale magnetische momenten meestal een willekeurige oriëntatie zodat het magnetisch effect klein of nul is.

Een intrinsieke eigenschap van elektronen, protonen en neutronen is hun *spin*, die ook bijdraagt tot hun magnetisch moment. Er geldt $\mu_{spin} = \frac{e\hbar}{2m_e}$. De combinatie van deze constanten noemen we de *Bohr magneton* μ_B :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}.$$



Magnetische momenten van atomen worden dus uitgedrukt als veelvouden van μ_B . In atomen met veel elektronen zullen de elektronen meestal paarsgewijs tegengestelde spin hebben, waardoor deze elkaar opheffen. Het totaal magnetisch moment is de vektorsom van de orbitale en intrinsieke magnetische momenten. Verder moeten we nog vermelden dat het magnetisch moment van protonen en neutronen veel kleiner is omdat hun massa veel groter is.

De magnetisatievector en de magnetische veldsterkte

De magnetische toestand van een materiaal wordt beschreven door de *magnetisatievector* \vec{M} . De grootte van deze vector is gelijk aan het magnetisch moment per volume-eenheid. Het magnetisch moment geeft aanleiding tot een magnetisch veld \vec{B}_m , de stroom die door de geleider vloeit veroorzaakt een uitwendig aangelegd magnetisch veld \vec{B}_0 . Het totale magnetisch veld zal dan gelijk zijn aan $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$.

We willen graag de relatie kennen tussen \vec{B}_m en \vec{M} . Daarvoor beschouwen we het magnetisch veld \vec{B}_M aangelegd door een spel. Dan geldt $B_m = \mu_0 n I$ waarbij I de stroom is in de ingebeelde spoel en n het aantal windingen per lengte-eenheid. Dan geldt

$$B_m = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 \frac{N I A}{l A}$$

waarbij N gelijk is aan het aantal windingen in de lengte l . We weten dat de teller $N I A$ gelijk is aan het totaal magnetisch moment van alle windingen in de lengte l , en de noemer $l A$ is gelijk aan het volume van de spoel geassocieerd aan deze lengte:

$$B_m = \mu_0 \frac{\mu}{V} = \mu_0 M.$$

Als we nu een materiaal in het magnetisch veld plaatsen, zal gelden dat $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$.

Om magnetische velden te analyseren voeren we de *magnetische veldsterkte* [magnetic field strength] \vec{H} in. De magnetische veldsterkte hangt af van het magnetisch veld veroorzaakt door de stromen in de geleider. De magnetische veldsterkte is gelijk aan het magnetisch moment per volume-eenheid.

We kunnen de magnetische veldsterkte \vec{H} definiëren als $\vec{H} \equiv \vec{B}_0/\mu_0$, waaruit volgt dat $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$. De grootheden \vec{H} en \vec{M} hebben dezelfde eenheden, en omdat \vec{M} gelijk is aan het magnetisch moment per volume-eenheid is de eenheid $Am^2/m^3 = A/m$.

Classificatie van magnetische materialen

Ferromagnetisch	atomen met permanent magnetisch moment	$\vec{M} \approx \vec{H}$ (hangt af van de voorgeschiedenis)	$\mu_m \gg \mu_0$
Paramagnetisch	atomen met permanent magnetisch moment	$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (\chi > 0)$	$\mu_m > \mu_0$
Diamagnetisch	atomen zonder permanent magnetisch moment	$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (\chi < 0)$	$\mu_m < \mu_0$

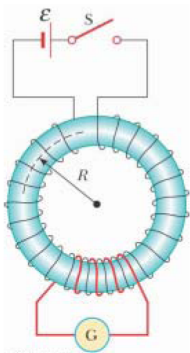
Voor de classificatie van materialen volgens hun magnetische eigenschappen, voeren we de *magnetische susceptibiliteit* χ in. Deze dimensieloze factor is een maat voor de ontvankelijkheid van een materiaal om gemagnetiseerd te worden. Het gaat hier meestal over zeer kleine getallen, en negatieve waarden wijzen erop dat het extern magnetisch veld wordt tegengewerkt. Voor paramagnetische en diamagnetische materialen geldt nu

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} = \mu_m \vec{H}$$

met de *magnetische permeabiliteit* $\mu_m = \mu_0(1 + \chi)$.

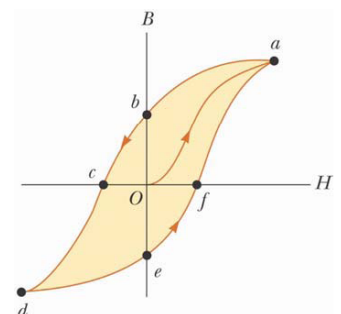
Ferromagnetisme

Een aantal kristallijne materialen zoals ijzer, kobalt, nikkel en gadolinium vertonen sterke magnetische effecten. De atomen van deze substantie bevatten permanente magnetische momenten die evenwijdig met elkaar oplijnen, zelfs in een zwak uitwendig magnetisch veld. De oplijning is permanent omdat de magnetische momenten sterk interageren. Alle ferromagnetische materialen zijn gemaakt van microscopische *domeinen*: regio's waar alle magnetische momenten opgelijnd zijn. De grenzen tussen de verschillende oriëntatiezones noemen we *domeinmuren*.



Een apparaat om experimenteel de magnetische eigenschappen van een ferromagnetisch materiaal op te meten zien we in de figuur hiernaast. Rond een torus van het ferromagnetisch materiaal dat we willen bestuderen zit een draad met N windingen waarop stroom zit, we noemen dit de primaire spoel. Een secundaire spoel wordt verbonden met een galvanometer die de totale magnetische flux door de torus opmeet. Het magnetisch veld \vec{B} in de torus wordt gemeten door de stroom in de torus op te drijven van 0 naar I . Door de metingen van \vec{B} te doen met en zonder de torus kunnen we de magnetische eigenschappen van het materiaal van de torus bepalen.

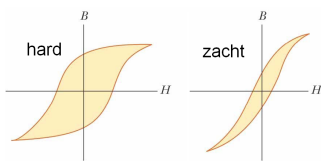
We beschouwen nu een torus gemaakt van niet-gemagnetiseerd ijzer. Als de stroom in de primaire spoel opgedreven wordt van 0 naar I , dan stijgt de grootte van de magnetische veldsterkte H evenredig met I wegens de uitdrukking $H = nI$. De grootte van het totaal magnetisch veld B stijgt ook bij een stijgende stroom, zoals we zien in de curve hiernaast van O naar a . In het punt O zijn de domeinen in ijzer willekeurig georiënteerd, dus $B_m = 0$.



De stijgende stroom in de primaire spoel veroorzaakt stijging van het extern elektrisch veld \vec{B}_0 zodat de opgelijnde domeinen vergroten in aantal tot alle magnetische momenten opgelijnd zijn in het punt a .

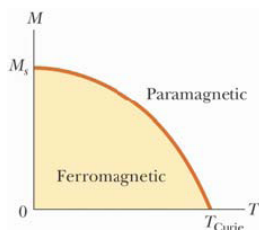
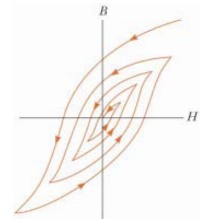
Vervolgens brengen we de stroom terug naar 0, zodat het extern veld uitgeschakeld wordt. De B - H -curve, ook wel de *magnetisatiecurve* genoemd, volgt nu het pad ab . In punt b is \vec{B} niet gelijk aan nul hoewel $\vec{B}_0 = 0$. De reden dat ijzer nu gemagnetiseerd is, is de ophijning van de magnetische momenten (dus $\vec{B} = \vec{B}_m$). Als de stroom in de primaire spoel wordt omgedraaid dan keert ook het extern magnetisch veld om, zodat de magnetisatie van het materiaal ongedaan gemaakt wordt in punt c waar $\vec{B} = 0$. Een stijging van de omgekeerde stroom veroorzaakt een magnetisatie in de omgekeerde richting, tot het saturatie-punt d . Analoog kunnen we de stroom nog eens omkeren, om via de punten e (geen extern magnetisch veld, wel intern door de ophijning) en f (geen magnetisch veld) weer naar a te gaan waar we weer maximale magnetisatie hebben.

Dit effect noemen we de *magnetische hysteresis* en het toont aan dat de magnetisatie van een ferromagnetisch materiaal afhangt van de voorgeschiedenis en van de grootte van het aangelegd magnetisch veld. De oppervlakte onder de hysteresiscurve is een maat voor de arbeid die nodig is om de cyclus te doorlopen.



We kunnen ferromagnetische materialen classificeren volgens de vorm en de grootte van hun hysteresis en volgens de sterkte van het maximum aangelegd veld. Een brede hysteresis wijst op een *hard ferromagnetisch materiaal*, een smalle hysteresis op een *zacht ferromagnetisch materiaal* (bijvoorbeeld *weekijzer*).

Een ferromagnetisch materiaal kan gedemagnetiseerd worden door het doorlopen van een loop, zoals in de figuur, of door het toedienen van magnetische schokken.



Als de temperatuur van een ferromagnetisch materiaal de *Curietemperatuur* T_{Curie} overschrijdt, dan wordt het materiaal paramagnetisch. Onder de Curietemperatuur zijn de magnetische momenten opgelijnd en is het materiaal ferromagnetisch, boven de Curietemperatuur is de thermische beweging zo groot dat de oriëntatie van de magnetische momenten vrij willekeurig is. M_s is de saturatiewaarde van de magnetisatie.

Momenteel doet men onderzoek op nanometerschaal naar de aanmaak van kleine dipoolmagneetjes. Er is gebleken dat ruitvormige mini-magneetjes hard ferromagnetisch zijn, en ovaalvormige zacht ferromagnetisch.

Paramagnetisme

Paramagnetische materialen hebben een kleine maar positieve magnetische susceptibiliteit ($0 < \chi \ll 1$) die veroorzaakt wordt door de atomen met een permanent magnetisch moment. Deze momenten interageren maar zwak met elkaar en zijn daarom niet opgelijnd als er geen extern magnetisch veld aanwezig is. Als we een paramagnetisch materiaal in een extern magnetisch veld plaatsen dan zullen de atomische magnetische momenten ophijnen met da veld. Het magnetisch veld heeft echter een tegenhanger: de thermische beweging probeert de magnetische moment willekeurig te oriënteren.

De magnetisatie van een paramagnetisch materiaal is evenredig met het aangelegde magnetisch veld en omgekeerd evenredig met de temperatuur:

$$M = C \frac{B_0}{T} .$$

Deze relatie kennen we als de *wet van Curie* met de *constante van Curie* C . Als B_0/T zeer groot wordt zodat alle magnetische momenten ophijnen is er saturatie, en dan geldt de wet van Curie niet meer.

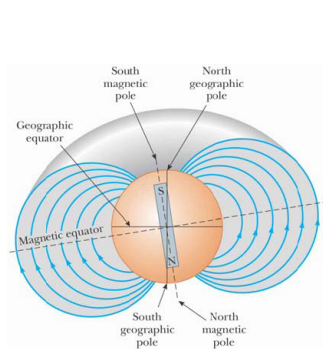
Diamagnetisme

Een diamagnetisch materiaal zal een extern aangelegd magnetisch veld proberen tegen te werken. Een diamagnetisch materiaal zal daarom afgestoten worden door een magneet. Hoewel diamagnetisme in alle materialen aanwezig is, is het effect ervan veel kleiner dan dat van paramagnetisme en ferromagnetisme. Daarom komt diamagnetisme alleen naar boven als er geen sprake is van paramagnetisme of ferromagnetisme. Om diamagnetisme te begrijpen zullen we teruggaan naar het klassieke model van twee elektronen die rond een kern cirkelen in tegengestelde richtingen maar met dezelfde snelheid. Door de elektrostatistische kracht die de positieve kern uitoefent op de elektronen blijven de elektronen in hun baan cirkelen. Omdat het magnetisch moment van de twee elektronen gelijk is is in grootte en tegengesteld in richting, kunnen ze elkaar tenietdoen zodat het magnetisch moment van het atoom gelijk is aan 0. Als we een extern magnetisch veld aanleggen zullen de elektronen een extra magnetische kracht $q\vec{v} \times \vec{B}$ ondervinden. Deze toegevoegde magnetische kracht gecombineerd met de elektrostatistische kracht veroorzaakt een versnelling van de hoeksnelheid voor het elektron van wie het magnetisch moment evenwijdig maar tegengesteld is aan het veld, en een vertraging van de hoeksnelheid voor het elektron van het magnetisch moment evenwijdig is met het veld en in dezelfde richting. Dit resulteert in twee magnetische momenten die elkaar niet langer tenietdoen, waardoor het materiaal nu een netto magnetisch moment krijgt dat tegengesteld is aan het aangelegde veld.

We weten dat een supergeleider een materiaal is met elektrische weerstand 0 wanneer de temperatuur onder een kritieke temperatuur gebracht wordt. Dit soort supergeleiders vormen ook een perfect diamagnetisch materiaal wanneer ze in hun supergeleidende staat zijn. Wanneer dus een extern magnetisch veld wordt aangelegd zal de supergeleider dit intern volledig omgekeerd zodat het intern magnetisch veld gelijk is aan 0. Dit fenomeen kennen we als het *Meissner effect*. Als we een permanente magneet in de buurt brengen van een supergeleider zullen de twee objecten elkaar afstoten.

30.9 Magnetisch veld van de aarde

30.9 The Magnetic Field of the Earth, blz. 953-954



De magnetische zuidpool van de aarde ligt aan de geografische noordpool, en de magnetische noordpool ligt aan de geografische zuidpool. De vallen echter niet exact samen, en de *magnetische declinatie* hangt af van het punt waarop je staat.

De oorzaak van het magnetisch veld van de aarde is waarschijnlijk niet het ijzer in de aardkern. Door de te hoge temperatuur zal dat ijzer nooit permanent gemagnetiseerd worden. Men vermoedt dat de convectiestromen van geladen deeltjes zoals ionen en elektronen het magnetisch veld van de aarde veroorzaken. Gemiddeld één tot twee keer per miljoen jaar vindt er een veldomkering plaats met een onstabiele periode van enkele duizenden jaren.

Deel V

Licht en Optica

Hoofdstuk 31

Het karakter van licht en de wetten van de geometrische optica

35 *The Nature of Light and the Laws of Geometric Optics*, blz. 1094-1125

Licht is de basis van bijna alle leven op aarde. Planten gebruiken licht om energie te produceren door fotosynthese, voor de mens is licht essentieel voor het verzenden en ontvangen van informatie. De aard en de eigenschappen van licht zijn dan ook al eeuwenlang een interessant onderwerp. Doorheen de geschiedenis heeft de mens hier al druk over gespeculeerd.

31.1 De aard van licht

35.1 *The Nature of Light*, blz. 1095-1096

Voor het begin van de 19^{de} eeuw werd licht gezien als een stroom van deeltjes die werd uitgezonden door het bekeken object of door de ogen van de waarnemer. *Newton* heeft veel bijgedragen tot het ontwerp van deze *deeltjestheorie*, en hij veronderstelde dat de deeltjes werden uitgezonden door een lichtbron. Wanneer deze deeltjes het oog bereikten zouden ze het zicht prikkelen. Met dit idee kon hij reflectie en breking verklaren.

De meeste wetenschappers accepteerden Newtons deeltjestheorie. Echter, tijdens zijn leven werd er nog een andere theorie voorgesteld. In 1678 stelde de Nederlandse Christian *Huygens* dat licht ook kon voorgesteld worden als een golf. Ook met dit golfmodel kon reflectie en breking verklaard worden. In 1801 gaf Thomas *Young* een eerste demonstratie van het golfkarakter van licht. Hij toonde dat, onder de juiste omstandigheden, lichtbundels met elkaar interfereren. Dit gedrag kon op dat moment niet verklaard worden door de deeltjestheorie, omdat er geen denkbare manier was waarop twee of meer deeltjes samen konden komen en elkaar teniet konden doen. Bijkomende ontwikkelingen in de 19^{de} eeuw hebben geleid tot de algemene aanvaarding van de golftheorie. Het meest belangrijk resultaat was het werk van *Maxwell*, die in 1873 beweerde dat licht een vorm was van een elektromagnetische golf met een hoge frequentie. In 1887 bevestigde *Hertz* deze theorie experimenteel door het aanmaken en detecteren van zulke elektromagnetische golven.

Hoewel het golfmodel en de klassieke theorie van elektriciteit en magnetisme de meeste eigenschappen van licht konden verklaren, konden ze enkele experimenten niet verklaren. Het meest opvallend was het foto-elektrisch effect. Wanneer licht op een metaal oppervlak schijnt, worden soms elektronen losgeslagen uit het metaaloppervlak. Een probleem dat hierbij opdook was dat de kinetische energie van een weggeslagen elektron onafhankelijk was van de lichtintensiteit. Deze bevinding sprak de *golftheorie* tegen, die zegt dat een meer intense lichtstraal meer energie aan het elektron zou moeten geven. Het foto-elektrisch effect is wel afhankelijk van de lichtkleur.

Een verklaring van het foto-elektrisch effect werd gegeven door *Einstein* in 1905. Zijn theorie maakte gebruik van de kwantisatie uit een theorie van Max *Planck* uit 1900. Het kwantisatie-model veronderstelt

dat de energie van een lichtgolf aanwezig is in deeltjes genaamd fotonen. Einstein zegt dat de energie van een *foton* evenredig is met de frequentie van de elektromagnetische golf: $E = hf$ waarbij h de *constante van Planck* is ($h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$).

Moderne wetenschappers zijn het er over eens dat licht een dubbel karakter heeft. In bepaalde situaties vertoont licht de eigenschappen van een golf en in andere situaties vertoont licht de eigenschappen van een deeltje.

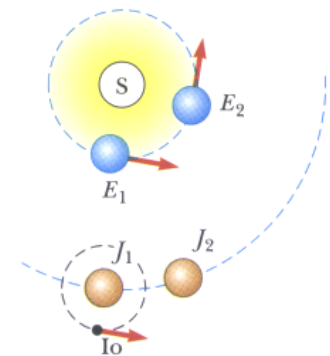
31.2 De snelheid van het licht

35.2 Measurements of the Speed of Light, blz. 1096-1097

$$\text{Lichtsnelheid: } c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Roemer's methode

In 1675 maakte de astronoom Ole Roemer de eerste succesvolle schatting van de lichtsnelheid. Gedurende een jaar observeerde hij een maan van Jupiter, Io. Io heeft een omwentelingsperiode rond Jupiter van ongeveer 42,5 uur. Jupiter heeft een omwentelingsperiode van 12 jaar rond de zon. Als de aarde 90° rond de zon draait, zal Jupiter amper $90^\circ/12 = 7,5^\circ$ gedraaid zijn.



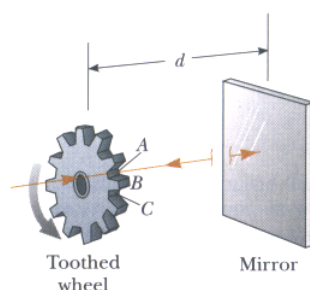
Een waarnemer zou verwachten dat de omwenteling van Io een constante periode heeft. Echter, *Roemer* ontdekte een systematische variatie in zijn gegevens. Hij vond dat de periode langer dan het gemiddelde is als de aarde weg gaat van Jupiter, en korter dan het gemiddelde als de aarde en Jupiter dichterbij elkaar komen.

Als Io een constante periode zou hebben, zou Roemer op een bepaald ogenblik moeten gezien hebben dat Jupiter Io verduisterde. Op dat moment kon hij ook de volgende verduistering voorspellen, maar hij stelde vast dat deze te laat was. Roemer wistte dit aan het feit dat het licht nu een langere weg moest afleggen naar de aarde.

Op basis van de gegevens van Roemer heeft Huygens een schatting gemaakt van de lichtsnelheid. Hij kwam uit op een minimum van $2,3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Dit experiment is historisch belangrijk omdat het aantoonde dat het licht een eindige snelheid heeft, en omdat het een schatting gaf van deze snelheid.

Fizeau's methode



De eerste succesvolle methode om de snelheid van het licht te meten met puur aardse technieken is ontwikkeld door de fysicus *Fizeau*. De basisprocedure bestaat erin het totale tijdsinterval te meten waarbij licht van een punt naar een spiegel reist en terug. Als d de afstand is tussen de lichtbron en de spiegel, en als het interval voor één ronde gelijk is aan Δt , dan is de lichtsnelheid gelijk aan $c = 2d/\Delta t$.

Om het interval voor één ronde te bepalen gebruikte Fizeau een *gekarteld wiel* dat een continue bundel licht verdeelt in een serie van lichtimpulsen. De rotatie van zo'n wiel bepaalt wat een waarnemer aan de lichtbron ziet. Omdat Fizeau de afstand d kende, het aantal tanden in het wiel en de hoeksnelheid van het wiel, kon hij de lichtsnelheid berekenen. Hij kwam uit op een schatting van $3,1 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Soortgelijke experimenten brachten meer precieze waarden voor c naar voren, tot we de huidige geaccepteerde waarde bekwamen.

31.3 Stralen in de geometrische optica

35.3 The Ray Approximation in Geometric Optics, blz. 1097-1098

De *geometrische optica* omvat de studie van de verspreiding van licht. We veronderstellen hierbij dat licht reist in een rechte lijn wanneer het zich door een uniforme medium verplaatst, en van richting verandert op het oppervlak met een ander medium of als de optische eigenschappen van het medium niet uniform zijn in ruimte of tijd.

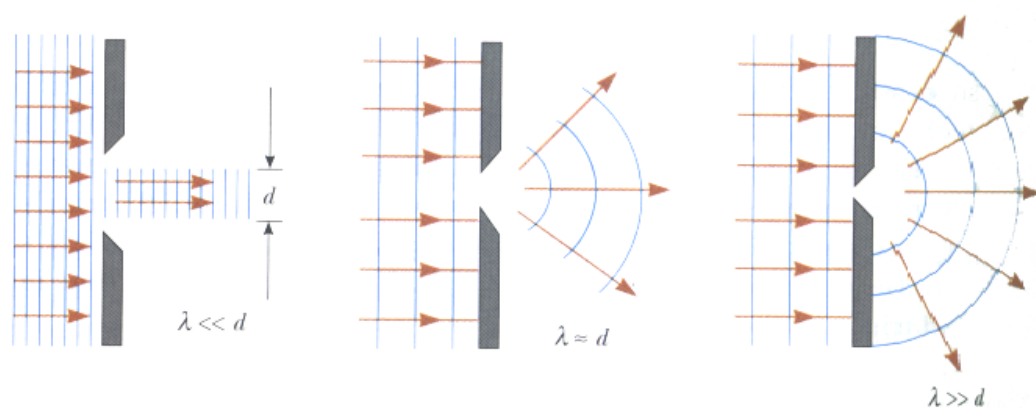
In dit en volgend hoofdstuk gebruiken we de zogenaamde *straalbenadering* [*ray approximation*].

Als een golf op een obstakel botst waarin een cirkelvormige opening zit met een diameter d die veel groter is dan de golflengte λ , dan beweegt de golf die uit de opening komt continu verder in een rechte lijn, op enkele randeffecten na. Op dat ogenblik is de straalbenadering geldig.

Als de diameter van de opening ongeveer even groot is als de golflengte, zal de golf zich verspreiden vanuit de opening in alle richtingen. Dit effect noemen we *buiging* [*diffraction*].

Als de diameter van de opening veel kleiner is dan de golflengte dan kunnen we de opening benaderen als een puntbron van golven.

De straalbenadering is zeer goed voor de studie van spiegels, lenzen, prisma's en optische instrumenten zoals telescopen, cameras en brilglazen. We zullen in dit en in volgend hoofdstuk veronderstellen dat de golflengte veel kleiner is dan de opening.

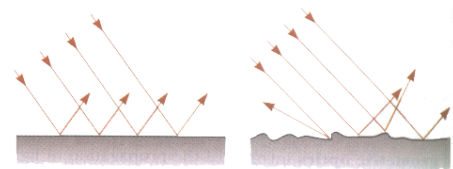


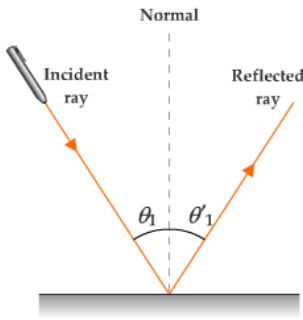
31.4 Reflectie

35.4 Reflection, blz. 1098-1101

Als licht reist van een medium naar een ander, zal een deel van het licht op de grens van het medium reflecteren. *Reflectie* van licht op een *effen oppervlak* noemen we *gerichte reflectie* [*specular reflection*].

We beschouwen een oppervlak als effen wanneer de variaties in het oppervlak veel kleiner zijn dan de golflengte van het invallend licht. Reflectie van licht op een ruw oppervlak noemen we *diffuse reflectie* [*diffuse reflection*]. Omdat we het hier alleen gaan hebben over gerichte reflectie, spreken we af dat we vanaf nu met reflectie spiegelreflectie bedoelen.





Veronderstel dat een lichtstraal invalt op een effen oppervlak met een hoek θ_1 gemeten vanaf de normaal, en de gereflecteerde lichtstraal maakt een hoek θ'_1 met de normaal. Uit experimenten en theorieën blijkt dat de invalshoek [angle of incidence] gelijk is aan de weerkaatsingshoek [angle of reflection], of nog:

$$\theta_1 = \theta'_1 . \tag{31.1}$$

Dit noemt men de *wet van reflectie*.

Het effect waarbij de weerspiegelde lichtstraal hetzelfde pad volgt als de invallende lichtstraal noemt met *retroreflectie*, en heeft vele toepassingen. Het wordt gebruikt bij de achterlampen van een auto, bij een STOP-bord en bij het nauwkeurig bepalen van de afstand aarde-maan.

Een andere toepassing van de wet van reflectie vinden we in de *digitale projectie*, die gebruik maakt van een chip genaamd digital micromirror device. Deze chips bevatten meer dan een miljoen kleine spiegels die individueel kunnen bewegen. Wanneer deze spiegel op de 'aan'-positie staat, reflecteert deze het licht richting het scherm. Wanneer deze spiegel op de 'uit'-positie staat, reflecteert deze het licht weg van het scherm. Digitale projectors hebben deze chips voor de primaire kleuren rood, blauw en groen, waarmee bijna alle kleuren kunnen getoond worden. Omdat een digitale film binair kan opgeslagen worden, is het transport heel gemakkelijk. Het beeld van een digitale film wordt als uitstekend ervaren.

31.5 Breking

35.5 Refraction, blz. 1102-1107

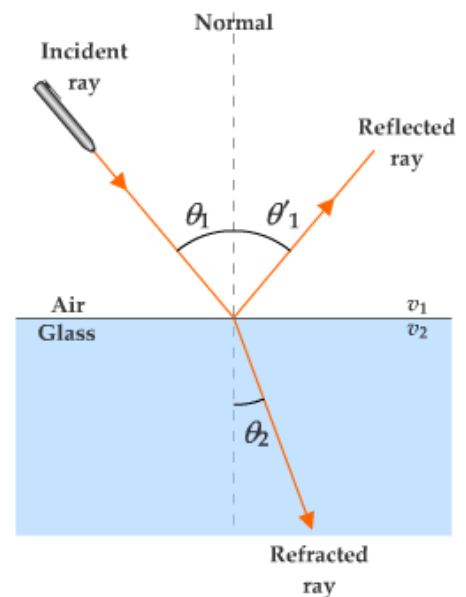
Als licht dat door een transparant medium reist een grens tegenkomt met een ander transparant medium, zal een deel van de energie gereflecteerd worden en een ander deel zal in het tweede medium terechtkomen. De lichtstraal die in het twee medium binnenkomt zal gebogen worden aan de grens, we zeggen dat de lichtstraal breekt. Het fenomeen noemen we *breking*.

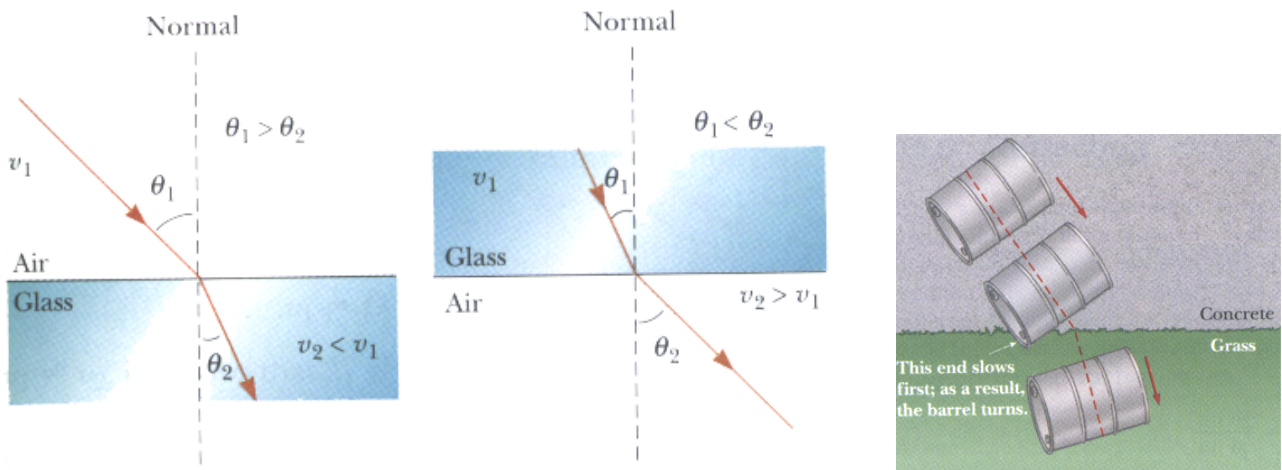
De invallende lichtstraal, de gereflecteerde lichtstraal en de gebroken lichtstraal liggen alledrie in hetzelfde vlak. Het pad van een lichtstraal door breking is omkeerbaar.

De *brekingshoek* [angle of refraction] hangt af van de eigenschappen van de twee media en van de invalshoek. Als v_1 de lichtsnelheid in het eerste medium is, en v_2 de lichtsnelheid in het twee medium, θ_1 de invalshoek en θ_2 de brekingshoek, dan geldt:

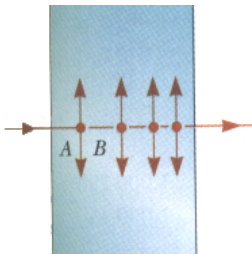
$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{constant} . \tag{31.2}$$

Uit deze vergelijking kunnen we afleiden dat wanneer licht sneller beweegt in het eerste medium dan in het tweede, dat de gebroken lichtstraal naar de normaal toe zal gebogen worden. Als het licht trager beweegt in het eerste medium dan in het twee, zal de gebroken lichtstraal van de normaal weg gebogen worden.





De lichtsnelheid in glas is ongeveer $2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, en deze geldt ogenblikkelijk als licht invalt op een blok glas. Wanneer de lichtstraal uit het glas komt en weer in lucht terecht komt zal het onmiddellijk weer zijn snelheid van $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ aannemen. Om te begrijpen waarom licht zich op deze manier gedraagt, moeten we naar de atomaire structuur van glas gaan kijken.



Wanneer het licht invalt op het glas, is het mogelijk dat de lichtstraal een elektron treft dat aan een atoom gebonden is (A). We veronderstellen dat het licht geabsorbeerd wordt door het atoom: dat veroorzaakt een oscillatie van het elektron (verticale pijltjes). Het oscillerende elektron werkt dan als een antenne en straalt het licht uit richting een ander atoom (B) waar het licht opnieuw geabsorbeerd wordt. Hoewel het licht tussen de atomen reist aan een snelheid van $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, wordt het vertraagd door de absorptie en uitstraling. De gemiddelde lichtsnelheid in glas verlaagt daarom tot $2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Wanneer de lichtstraal terug in vacuüm komt, vallen absorptie en uitstraling weg dus keert de lichtsnelheid terug naar zijn originele waarde.

Brekkingsindex

In het algemeen geldt dat de lichtsnelheid in een materiaal altijd lager is dan de lichtsnelheid in vacuüm. We kunnen zelfs stellen dat licht aan zijn maximumsnelheid rijst in vacuüm. Het is daarom gepast om de *brekkingsindex* [index of refraction] n van een medium te definiëren als volgt:

$$n \equiv \frac{\text{lichtsnelheid in vacuüm}}{\text{lichtsnelheid in het medium}} = \frac{c}{v}$$

Uit deze definitie volgt dat de brekkingsindex dimensieloos is en altijd groter dan 1 omdat steeds geldt dat $v < c$. Verder geldt ook dat de brekkingsindex gelijk is aan 1 voor vacuüm.

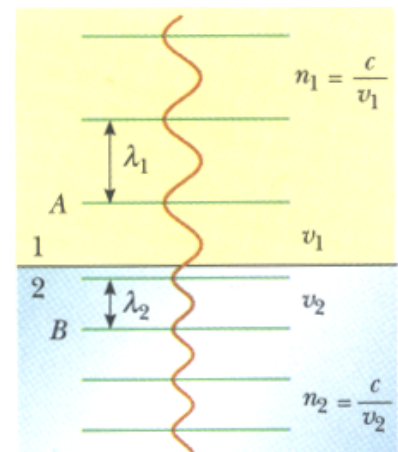
Als licht van een medium naar een ander reist verandert de frequentie niet maar de golflengte wel. Immers, als de frequentie zou veranderen zou dat betekenen dat de energie verandert op de grens tussen de twee media. Omdat er geen mechanisme is om dat te laten gebeuren, moet de frequentie dus constant zijn, of nog: $f_1 = f_2 = f$. Uit de relatie $v = f \lambda$ volgt dan dat $v_1 = f \lambda_1$ en $v_2 = f \lambda_2$. Omdat $v_1 \neq v_2$ geldt dus $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

We kunnen volgende vergelijkingen opstellen:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Hieruit volgt $\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$.

Als het eerste medium vacuüm is, geldt dus $n = \frac{\lambda}{\lambda_n}$ waarbij λ de golflengte in vacuüm is en λ_n de golflengte in het tweede medium met brekkingsindex n . Omdat $n > 1$ geldt $\lambda_n < \lambda$.



We kunnen de relatie (31.2) nu ook uitdrukken als volgt:

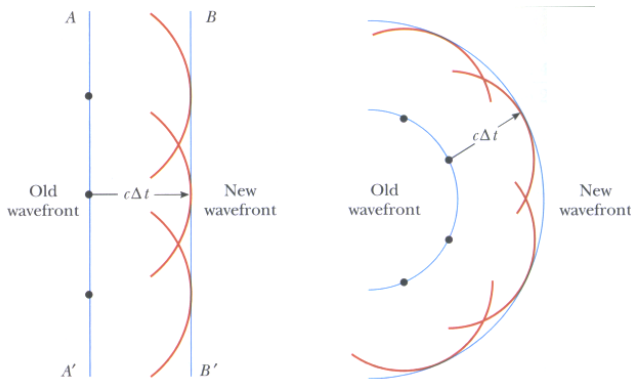
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{31.3}$$

Deze relatie noemen we de *brekingswet van Snellius* [Snell's law of refraction].

31.6 Huygens' principe

35.6 Huygens's Principle, blz. 1107-1109

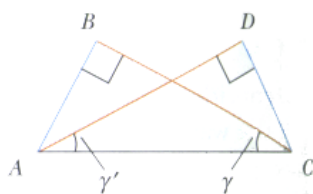
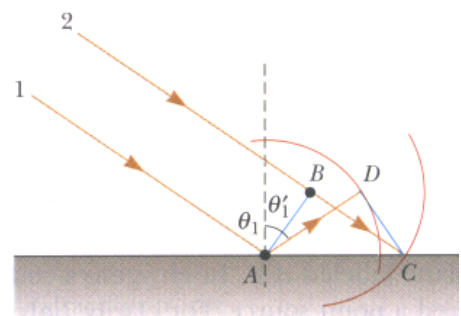
Het principe van Huygens is een geometrische constructie waarbij we informatie van een vorig golffront gebruiken om de positie van een nieuw golffront te bepalen op een bepaald moment.



In deze constructie worden alle punten in een gegeven golffront beschouwd als puntbronnen voor de productie van sferische secundaire golven (wavelets). Deze secundaire golven planten zich voort met de karakteristieke lichtsnelheid voor het medium. Na een bepaald tijdsinterval wordt het nieuwe golffront gevormd door het oppervlak dat raakt aan alle secundaire golven.

Het principe van Huygens toegepast op reflectie

We willen de *wet van reflectie* (31.1) bewijzen aan de hand van het principe van Huygens. We laten daarvoor twee lichtstralen invallen op een oppervlak, zoals in de tekening. De lijn *AB* stelt een golffront voor van het invallende licht op het moment dat straal 1 invalt op het oppervlak. Op dat ogenblik zenden zowel *A* (richting *D*) als *B* (richting *C*) een Huygens wavelet uit. De tekening toont deze wavelets na een tijdsinterval Δt , op het moment dat de straal 2 invalt op het oppervlak. Omdat beide lichtstralen aan dezelfde snelheid bewegen, moet gelden dat $AD = BC = c \Delta t$.



We isoleren nu de twee driehoeken *ABC* en *ADC*. Deze driehoeken zijn rechthoekig, omdat een golffront loodrecht op de richting van de lichtstraal staat. De schuine zijden zijn gelijk, en verder geldt ook $AD = BC$. We kunnen dus besluiten dat de twee driehoeken congruent zijn, waaruit volgt dat

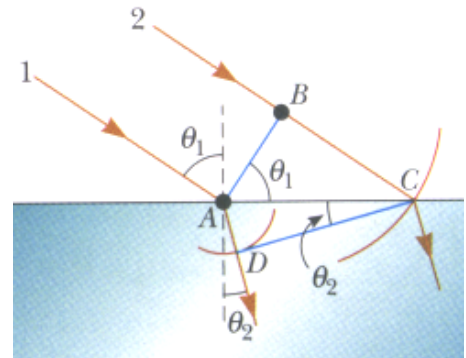
$$\cos \gamma = \frac{BC}{AC} \quad \text{en} \quad \cos \gamma' = \frac{AD}{AC} .$$

Omdat $AD = BC$ volgt hieruit dat $\cos \gamma = \cos \gamma'$. Omdat zowel γ als γ' tussen 0° en 90° liggen, volgt daaruit dat $\gamma = \gamma'$. Als we bovenstaande tekeningen vergelijken, zien we dat $\gamma = 90^\circ - \theta_1$ en $\gamma' = 90^\circ - \theta_1'$, dus geldt $90^\circ - \theta_1 = 90^\circ - \theta_1'$. We mogen dus besluiten dat $\theta_1 = \theta_1'$, en hiermee is de wet van reflectie bewezen.

Het principe van Huygens toegepast op breking

We willen ook de *brekingswet van Snellius* (31.3) bewijzen aan de hand van het principe van Huygens. Daarvoor focussen we onze aandacht op het moment dat straal 1 invalt op het oppervlak en het daaropvolgend tijdsinterval tot straal 2 invalt op het oppervlak.

Tijdens dit interval zendt de golf een Huygens wavelet uit: vanuit A richting D en vanuit B richting C . Omdat deze twee wavelets door verschillende media reizen zullen de stralen van de wavelets verschillen. De straal van de wavelet van A is $AD = v_2 \Delta t$, waarbij v_2 gelijk is aan de golfsnelheid in het tweede medium. De straal van de wavelet van B is $BC = v_1 \Delta t$, waarbij v_1 gelijk is aan de golfsnelheid in het eerste medium.



Uit de driehoeken ABC en ADC leiden we af dat

$$\sin \theta_1 = \frac{BC}{AC} = \frac{v_1 \Delta t}{AC} \quad \text{en} \quad \sin \theta_2 = \frac{AD}{AC} = \frac{v_2 \Delta t}{AC} .$$

Als we de eerste vergelijking delen door de tweede bekommen we dat

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} .$$

We weten dat $v_1 = c/n_1$ en $v_2 = c/n_2$, dus geldt

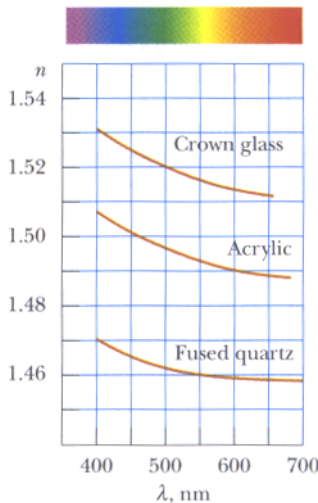
$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{31.4}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \tag{31.5}$$

Hiermee is de brekingswet van Snellius bewezen.

31.7 Dispersie

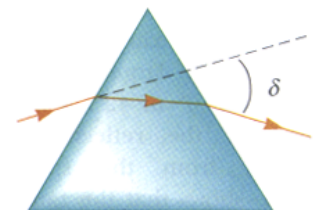
35.7 Dispersion and Prisms, blz. 1109-1111



Een belangrijke eigenschap van de brekingsindex n is dat ze voor een gegeven materiaal varieert naargelang de golflengte van het licht dat zich doorheen het materiaal beweegt. Dit gedrag noemen we *dispersie* [dispersion] (verstrooiing, verspreiding).

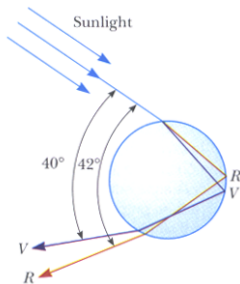
Omdat n een functie is van de golflengte zal licht met verschillende golflengtes anders zal afgebogen worden wanneer het invalt op een brekingsmateriaal. Meestal daalt de brekingsindex wanneer de golflengte groter wordt.

Om de effecten hiervan te verstaan, beschouwen we een *monochromatische lichtstraal* [single-wavelength light] die invalt op een prisma (dit is een lichtstraal met één enkele golflengte). De hoek die het verlengde van de invallende lichtstraal maakt met de uittredende lichtstraal noemen we de *deviatiehoek* [angle of deviation] δ .



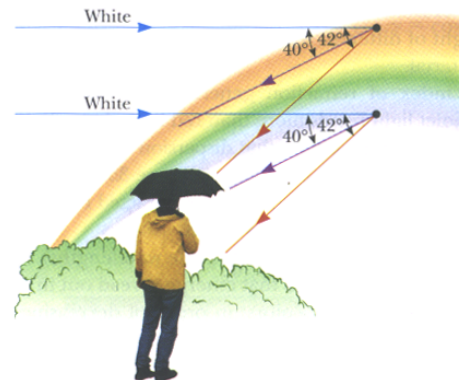
We weten dat *wit licht* een combinatie is van alle zichtbare golflengtes. We laten een straal wit licht invallen op een prisma. De uittredende stralen verpreiden zich nu als een serie van kleuren die we kennen

als het *zichtbaar spectrum* [visible spectrum]. In volgorde van afnemende golflengte zijn deze kleuren rood, oranje, geel, groen, blauw en violet. Het is duidelijk dat de deviatiehoek δ afhangt van de golflengte. Violet licht wordt het meest afgebogen en rood licht het minst, de andere kleuren liggen tussen deze extrema. Newton toonde aan dat elke kleur een specifieke deviatiehoek heeft, en dat we de kleuren terug kunnen combineren tot wit licht.



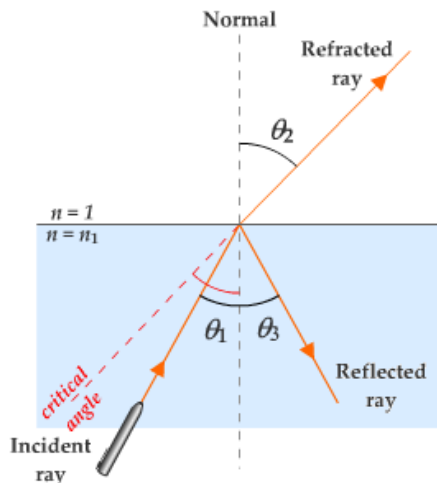
Dispersie van licht in een spectrum komt tevoorschijn bij een *regenboog*, die gevormd wordt wanneer een waarnemer zicht tussen de zon en een regenbui bevindt. Het zonlicht valt in op de waterdruppels en elke kleur wordt afzonder afgebogen onder een hoek van 40° (violet) tot 42° (rood).

Omdat een waarnemer vanuit de bovenste druppels veel rood licht ziet, ziet hij deze druppel als rood. De onderste druppels zullen meer violet licht naar de waarnemer sturen, waardoor de waarnemer de onderste druppels als violet zal zien. Op deze manier vormt zich een regenboog. Een dubbele regenboog vormt zich wanneer het licht twee keer gereflecteerd wordt in de regen-druppel.



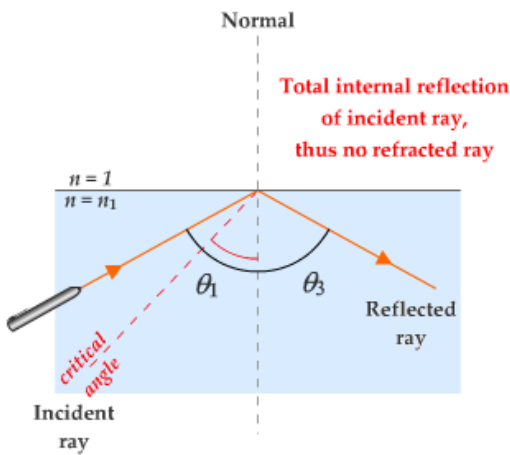
31.8 Totale interne reflectie

35.8 Total Internal Reflection, blz. 1111-1114



Totale interne reflectie is een interessant effect dat zich soms voordoet wanneer licht van één medium naar een ander medium gestuurd wordt, waarbij het tweede medium een lagere brekingsindex heeft dan het eerste medium. Er moet dus steeds gelden dat $n_1 > n_2$.

De uittredende stralen worden weg van de normaal gebogen omdat $n_1 > n_2$. Maar bij een bepaalde invalshoek genaamd de *kritieke hoek* [critical angle] θ_c beweegt het afgebogen licht parallel met het grensooppervlak zodat $\theta_2 = 90^\circ$.



Als de invalshoek groter is dan θ_c zal de lichtstraal volledig gereflecteerd worden op het grensooppervlak. De gereflecteerde lichtstraal zal uiteraard voldoen aan de wet van reflectie (31.1), dus de weerkaatsingshoek zal gelijk zijn aan de invalshoek. We kunnen de brekingswet van Snellius (31.3) gebruiken om de kritieke hoek te berekenen. We weten dat $\theta_1 = \theta_c$ en $\theta_2 = 90^\circ$, dus volgt uit (31.3) dat

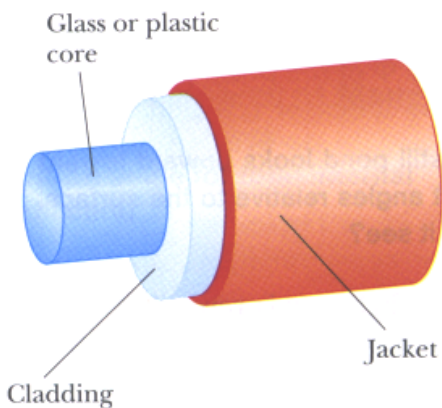
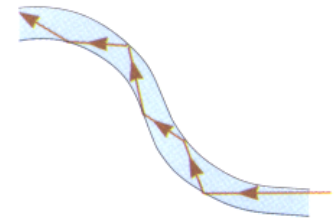
$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ = n_2 .$$

Hieruit volgt eenvoudig de volgende vergelijking:

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{voor } n_1 > n_2 .$$

Glasvezel

Een toepassing van totale interne reflectie vinden we bij het gebruik van glas of transparante plastieken buizen waarbij we licht willen verplaatsen van een plaats naar een andere. In de tekening wordt duidelijk dat licht beperkt wordt wanneer het doorheen een kabel reist, ten gevolge van succesvolle totale interne reflecties. Zo'n lichtbuis is flexibel wanneer dunne buisjes gebruikt worden in plaats van dikke kabels. Een flexibele lichtbuis noemen we een *glasvezel* [optical fiber]. We gebruiken een bundel parallele buisjes om een optisch transportkanaal te construeren, zodat beelden kunnen verplaatst worden. Deze techniek is in de industrie gekend onder de naam *fiber optics*.



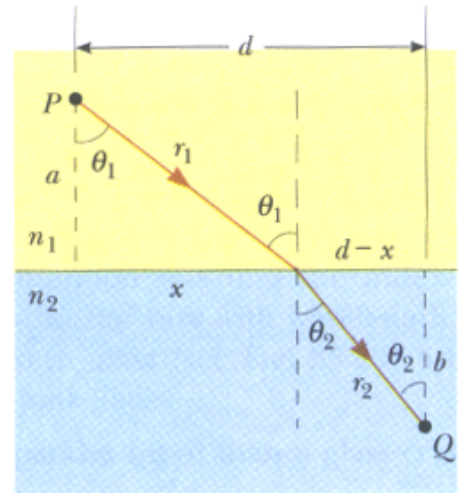
Een glasvezelkabel bestaat uit een transparante kern omhuld door een *cladding*, een materiaal dat een lagere brekingsindex heeft dan de kern. De combinatie wordt soms omhuld met plastic om schade te voorkomen. Het licht reist als het ware in de kern en botsend tegen de cladding waarbij de invalshoek de kritieke hoek steeds overschrijdt. De weinige intensiteit die verloren gaat bij het transport, verliezen we vooral aan de uiteinden van de kabel en door absorptie in de kabel zelf.

31.9 Fermats principe

35.9 Fermat's Principle, blz. 1114-1115

Fermat heeft een algemeen principe ontwikkeld dat kan gebruikt worden bij het bepalen van het pad dat licht volgt tussen twee punten. Het *principe van Fermat* zegt dat wanneer licht tussen twee punten reist, het pad steeds datgene is met het kleinste tijdsinterval. Een direct gevolg van dit principe is dat licht in een homogeen medium steeds een rechte lijn volgt, omdat een rechte lijn steeds het kortste pad is tussen twee punten.

Het principe van Fermat kan gebruikt worden om de brekingswet van Snellius (31.3) af te leiden. We veronderstellen dat licht reist van een punt P in medium 1 naar een punt Q in medium 2. We definiëren $a, b, d, x, r_1, r_2, \theta_1$ en θ_2 zoals op de tekening. De lichtsnelheid in medium 1 is gelijk aan c/n_1 en de lichtsnelheid in medium 2 is gelijk aan c/n_2 . Als we veronderstellen dat het licht vertrekt in P op $t = 0$, dan komt het aan in Q op tijdstip t met



$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c/n_2}.$$

Om de waarde van x te kennen waarbij t minimaal is, leiden we t af naar x en stellen deze afgeleide gelijk aan 0:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dt}{dx} = \frac{n_1}{c} \frac{d}{dx} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \frac{d}{dx} \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \\ &= \frac{n_1}{c} \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{n_2}{c} \frac{2(d-x)(-1)}{2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \\ &= \frac{n_1 x}{c\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{n_2(d-x)}{c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \end{aligned}$$

Of nog:

$$\frac{n_1 x}{c\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{n_2(d-x)}{c\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Uit de tekening volgt dat

$$\sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{en} \quad \sin \theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Wanneer we deze twee uitdrukkingen substitueren in de gevonden vergelijking bekommen we

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

en daarmee is de brekingswet van Snellius bewezen.

Hoofdstuk 32

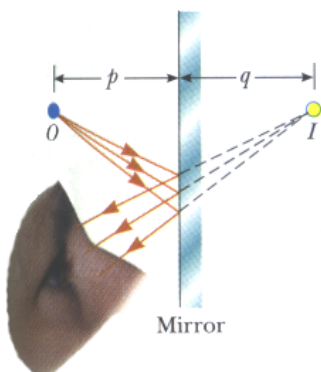
Beeldvorming

36 Image Formation, blz. 1126-1175

In dit hoofdstuk gebruiken we de straalbenadering en veronderstellen we dat licht zich voortbeweegt in een rechte lijn. Deze veronderstellingen leiden tot geldige voorspellingen op het gebied van *geometrische optica*.

32.1 Beeldvorming bij platte spiegels

36.1 Images Formed by Flat Mirrors, blz. 1127-1131

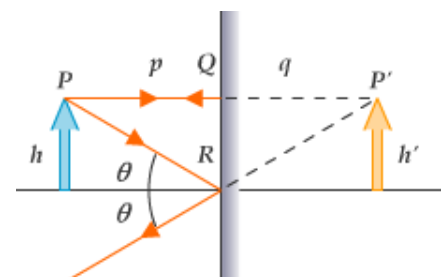


We beginnen met de gemakkelijkste spiegel: de *platte spiegel* [flat mirror]. We beschouwen een puntbron die licht uitstuurt in het punt O , op een afstand p van de spiegel. De afstand p noemen we de *voorwerpsafstand* [object distance]. Wanneer de lichtstralen de bron verlaten zullen ze divergeren, weerkaatst worden op de spiegel en dan verder divergeren. Vanuit het oogpunt van de waarnemer lijken de lichtstralen te komen uit het punt I , dat geconstrueerd wordt als het snijpunt van het verlengde van de divergerende lichtstralen na weerkaatsing. We noemen I het *beeld* [image] van het object in het punt O . Het punt I ligt op een afstand q van de spiegel: deze afstand noemen we de *beeldpuntsafstand* [image distance].

Beelden worden geclassificeerd als *reëel* [real] of *virtueel* [virtual]. Een beeld is reëel als de lichtstralen door het beeld gaan en divergeren vanaf het beeldpunt. Een beeld is virtueel als de lichtstralen niet door het beeld gaan en dus alleen lijken te divergeren vanuit het beeldpunt.

Een beeld gevormd door een platte spiegel is altijd virtueel. Reële beelden kunnen op een scherm getoond worden, virtuele beelden niet.

We kunnen de eenvoudige geometrie van de figuur hiernaast gebruiken om de eigenschappen van het beeld bij platte spiegels te onderzoeken. Hoewel er oneindig veel verschillende lichtstralen uit elk punt van het object komen, moeten we maar twee lichtstralen bekijken om te weten waar het beeld zich zal vormen. De eerste straal vertrekt in P en valt loodrecht in op de spiegel en reflecteert op zichzelf. De tweede straal vertrekt in P en valt in op de spiegel in R , om daar te reflecteren zoals op de tekening en volgens de wet van reflectie (31.1).



Een waarnemer voor de spiegel kan de twee gereflecteerde lichtstralen nu doortekenen om zo het punt P' achter de spiegel te vinden vanwaar de lichtstralen lijken te komen. Wanneer we dit proces ook voor andere punten van het object doen, zullen we een virtueel beeld achter de spiegel bekomen.

Omdat de driehoeken PQR en $P'QR$ congruent zijn, geldt $|PQ| = |P'Q|$. We concluderen daaruit dat bij een platte spiegel de voorwerpsafstand gelijk is aan de beeldpuntsafstand.

De geometrie in de tekening toont ook dat de hoogte h van het object gelijk is aan de hoogte h' van het beeld. We definiëren de *laterale vergroting* [*lateral magnification*] M van een beeld als volgt:

$$M \equiv \frac{\text{hoogte van het beeld}}{\text{hoogte van het object}} = \frac{h'}{h}. \quad (32.1)$$

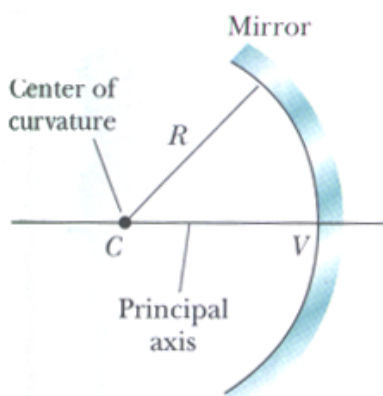
Deze definitie is geldig voor alle spiegels en lenzen. Voor een platte spiegel geldt voor elk beeld $M = 1$. Tenslotte merken we nog op dat het beeld bij een platte spiegel een schijnbare *links-rechts-verwisseling* [*left-right-reversal*] toegepast. De verwisseling is eigenlijk een *voor-achter-verwisseling* [*front-back reversal*], veroorzaakt door de lichtstralen die voorwaarts naar de spiegel gaan en dan teruggereflecteerd worden.

We concluderen dat het beeld gevormd door een platte spiegel de volgende eigenschappen heeft:

- Het beeld is even ver achter de spiegel als het object voor de spiegel.
- Het beeld is even groot als het object, virtueel en rechtopstaand.
- Het beeld heeft voor-achter-verwisseling.

32.2 Beeldvorming bij sferische spiegels

36.2 Images Formed by Spherical Mirrors, blz. 1131-1138



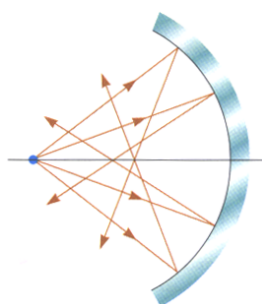
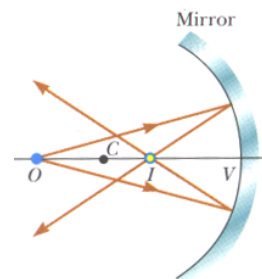
Een *bolvormige spiegel* [*spherical mirror*] heeft de vorm van een stuk van een sfeer. Dit soort spiegels verenigen binnenkomende parallelle lichtstralen in één punt.

Als licht gereflecteerd wordt op de binnenkant dan noemen we de spiegel *concaaf* of *hol*. Als licht gereflecteerd wordt op de buitenkant dan noemen we de spiegel *convex* of *bol*.

De spiegel heeft een *kromtestraal* R , en het *krommingscentrum* is het punt C . Het punt V is het centrum van het stuk van de sfeer, en de lijn door C en V is de *hoofdas* [*principal axis*] van de spiegel.

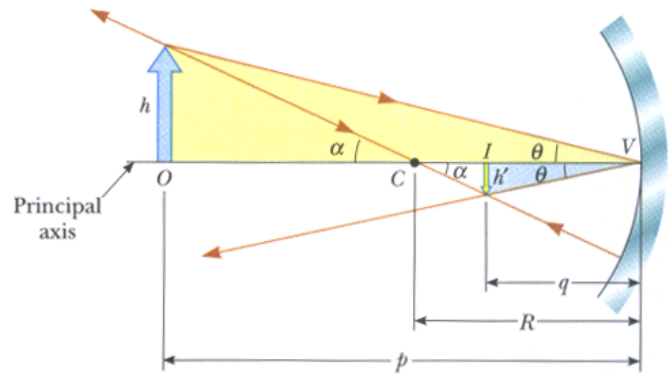
Concave of holle spiegels

We plaatsen een puntbron in O , waarbij O op de hoofdas ligt maar niet tussen C en V . We tekenen dan twee divergerende stralen vanuit O en zien dat deze stralen convergeren na reflectie op de spiegel. De stralen gaan door het beeldpunt I en divergeren vanaf daar alsof het object daar zou staan. We krijgen dus een reëel beeld in het punt I van het object O . Dit beeld zal omgekeerd zijn t.o.v. het object.



We moeten wel benadrukken dat dit fenomeen enkel geldig is wanneer de stralen dicht bij de hoofdas blijven. Dit soort stralen noemen we *paraxiale stralen*. Wanneer de stralen te ver weg zijn van de hoofdas zullen ze convergeren in andere punten op de hoofdas, zodat er een wazig beeld ontstaat. Dit effect noemen we *lens afwijkingen* [*spherical aberration*] en zullen we later nog bespreken.

Uit de tekening hiernaast en met gegeven voorwerpsafstand p en kromtestraal R kunnen we de beeldpuntsafstand q berekenen. Per conventie meten we p , q en R vanaf V . De tekening toont twee lichtstralen die vertrekken aan de top van het object en die het beeld lokaliseren.



Uit de gele driehoek leiden we af dat $\tan \theta = h/p$, uit de blauwe driehoek volgt dat $\tan \theta = -h'/q$. Het minteken staat er omdat het beeld omgekeerd is, dus h' is negatief. Hieruit volgt $h/p = -h'/q$, dus samen met vergelijking (32.1) volgt daaruit dat $M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$.

Uit de driehoek tussen C en h en uit de driehoek tussen C en h' volgt dat

$$\tan \alpha = \frac{h}{p - R} \quad \text{en} \quad \tan \alpha = \frac{h'}{R - q} .$$

Daaruit volgt

$$M = -\frac{q}{p} = \frac{h'}{h} = -\frac{R - q}{p - R} \quad \text{dus geldt} \quad \frac{q}{p} = \frac{R - q}{p - R} .$$

Hieruit volgt de *spiegelvergelijking*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} . \tag{32.2}$$

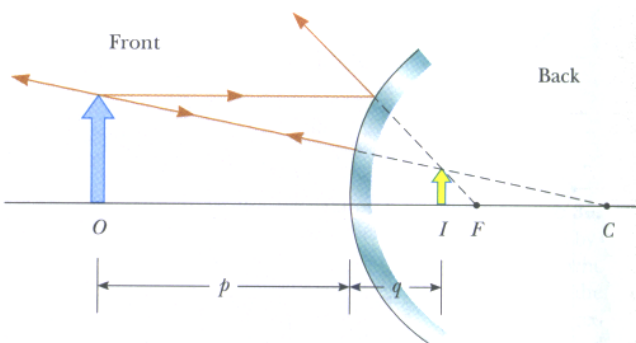
Als het object heel ver van de spiegel staat ($p \gg R$) geldt $1/p \approx 0$ dus $q \approx R/2$. De invallende stralen zijn eigenlijk parallel. Het bekomen beeldpunt noemen we in dit speciale geval het *brandpunt* [*focal point*] F met *brandpuntsafstand* [*focal length*] f , waarvoor geldt dat $f = \frac{R}{2}$.

Met deze informatie kunnen we de spiegelvergelijking (32.2) herschrijven tot

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} . \tag{32.3}$$

Merk hierbij op de f alleen afhangt van de kromtestraal, en niet van het materiaal waarvan de spiegel gemaakt is. Dit is anders voor lenzen: hier is het materiaal wel belangrijk omdat licht door het materiaal moet.

Convexe of bolle spiegels



De tekening hiernaast toont de beeldvorming bij een convexe spiegel. Het beeld is virtueel omdat het lijkt alsof de gereflecteerde stralen van een punt achter de spiegel komen. Het beeld zal achter rechtopstaan en kleiner zijn dan het object. Dit type spiegel wordt vaak gebruikt in winkels om winkeldiefstal tegen te gaan omdat op een kleine spiegel toch een grote oppervlakte kan gezien worden.

Index

- I^2R verlies, 41
 \vec{E} , 5
digital micromirror device, 67
geleider [conductor], 3
isolator [insulator], 3
- algemene vorm van de wet van Ampère, 58
Ampère A , 55
ampère A , 37
- beeld [image], 74
beeldpuntsafstand [image distance], 74
belastingweerstand, 42
Bohr magneton μ_B , 59
bolle spiegel, 76
bolvormige spiegel [spherical mirror], 75
brandpunt [focal point] F , 76
brandpuntsafstand [focal length] f , 76
breking, 67
brekingshoek [angle of refraction], 67
brekingsindex [index of refraction] n , 68
brekingswet van Snellius, 69
brekingswet van Snellius [Snell's law of refraction], 69
buiging [diffraction], 66
- capaciteit C , 30
caviteit in een geleider, 27
cilindrische condensator, 31
cladding, 72
concave spiegel, 75
condensator [capacitor], 30
conservatief, 19
conservatief veld, 22
constante van Curie C , 61
constante van Planck, 65
constante van Planck \hbar , 59
convexe spiegel, 76
Corona ontlading, 28
Coulomb C , 55
Coulomb constante, 4
Curietemperatuur T_{Curie} , 61
cyclotron, 51
cyclotronfrequentie, 50
- de magnetische permeabiliteit μ_m , 60
- de ruimtehoek Ω , 17
De wet van Gauss:, 11
deeltjestheorie, 64
deviatiehoek [angle of deviation] δ , 70
diëlektricum, 30, 34
diëlektrische constante, 34
diëlektrische sterkte, 34
diffuse reflectie [diffuse reflection], 66
digitale projectie, 67
dipool, 5
dispersie [dispersion], 70
domeinen, 60
domeinmuren, 60
driftsnelheid v_d , 38
- effen oppervlak, 66
Einstein, 64
elastische potentiële energie $U_s \equiv \frac{kx^2}{2}$, 19
elektrisch dipoolmoment \vec{p} , 34
elektrisch veld, 5
elektrisch veld van Hall [Hall field], 52
elektrische flux Φ_E , 10
elektrische potentiaal V , 19
elektrische spanning van Hall [Hall voltage] ΔV_H , 52
elektrische stroom, 37
elektrische veldlijnen, 8
elektrodynamica, 37
elektromotorische kracht ε , 42
elektronvolt, 20
elektrostatica, 37
elektrostatisch evenwicht, 15
emf ε , 42
energiedichtheid u_E , 33
equipotentiaaloppervlak, 21
equivalente weerstand R_{eq} , 43
- Farad F , 30
fiber optics, 72
Fizeau, 65
foto-geleidend materiaal [photoconductor], 29
foton, 65
- Gauss G , 47
Gaussoppervlak, 12

- geïnduceerde polarisatie, 35
gekarteld wiel, 65
geleidbaarheid [*conductivity*], 38
geleidingselectronen, 39
gelijkstroom (DC), 42
geometrische optica, 64, 66, 74
gepolariseerd, 35
gerichte reflectie [*specular reflection*], 66
glasvezel [*optical fiber*], 72
golftheorie, 64
gravitatieveld, 5
gravitationele potentiële energie $U_g \equiv mgy$, 19
- halfgeleiders, 3
Hall coëfficiënt R_H , 52
Hall effect, 52
hard ferromagnetisch materiaal, 61
Hertz, 64
holle spiegel, 75
hoofdas [*principal axis*], 75
Huygens, 64
- impuls \vec{p} , 50
inductie, 4
interne weerstand r , 42
invalshoek [*angle of incidence*], 67
- Joule, 19
joule heating, 41
- kathodestraalbuis (CRT), 9
krachtmoment [*torque*], 34
kritieke hoek [*critical angle*] θ_c , 71
kritieke temperatuur T_c , 40
krommingscentrum, 75
kromtestraal R , 75
- ladingsdichtheid, 6
ladingsdragers, 37
laterale vergroting [*lateral magnification*] M , 75
lens afwijkingen [*spherical aberration*], 75
Lichtsnelheid, 65
lijnintegraal, 19
links-rechts-verwisseling [*left-right-reversal*], 75
Lorentzkracht, 51
- magnetisatiecurve, 61
magnetisatievector \vec{M} , 59
magnetisch dipoolmoment μ , 49
magnetisch moment \vec{u} , 59
magnetisch veld \vec{B} , 47
magnetische declinatie, 62
magnetische fles, 50
magnetische flux, 57
- magnetische hysteresis, 61
magnetische permeabiliteit van vacuüm μ_0 , 53
magnetische susceptibiliteit χ , 60
magnetische veldlijnen, 47
magnetische veldsterkte [*magnetic field strength*] \vec{H} , 59
massaspectrometer, 51
Maxwell, 64
Meissner effect, 62
monochromatische lichtstraal [*single-wavelength light*], 70
- Newton, 64
niet-polaire moleculen, 35
Noorderlicht, 50
- Ohm, 38
ohm Ω , 38
ohmse materialen, 38
orbitaal magnetisch moment [*orbital angular momentum*], 59
- parallele platen condensator, 31
paraxiale stralen, 75
periode [*period of motion*] T , 50
Planck, 64
platte spiegel [*flat mirror*], 74
polaire moleculen, 35
polarisatie, 4
potentiële energie, 19
potentiële energie per testlading, 19
potentiaal V , 19
potentiaalverschil ΔV , 20
principe van Fermat, 72
pulsatie of hoeksnelheid [*angular speed*] ω , 50
- RC-keten, 44
reëel [*real*], 74
Reflectie, 66
regenboog, 71
relatieve permittiviteit, 34
resistiviteit ρ , 38
retroreflectie, 67
Roemer, 65
- sferische condensator, 32
Snelheidsfilter, 51
solenoid, 56
spiegelvergelijking, 76
spin, 59
splitsing [*junction*], 43
spoel, 56
sterradialen, 17
straalbenadering [*ray approximation*], 66

- straling [*radiation*], 40
- stroom [*current*], 37
- stroomdichtheid J , 38
- supergeleiders, 40

- temperatuurscoëfficiënt voor resistiviteit α , 39
- Tesla T , 47
- tijdsconstante τ , 45
- Totale interne reflectie, 71

- unificatie, 2

- Van Allen belts, 50
- vector, 4
- vectorproduct $\vec{a} \times \vec{b}$, 46
- vermogen [*power*] \mathcal{P} , 40
- verplaatsingstroom I_d , 58
- virtueel [*virtual*], 74
- Volt, 20
- voor-achter-verwisseling [*front-back reversal*], 75
- voorwerpsafstand [*object distance*], 74

- Watt W , 40
- weber Wb , 57
- weekijzer, 61
- weerkaatsingshoek [*angle of reflection*], 67
- weerstand, 38
- weerstand R , 38
- wet van Ampère, 55, 58
- wet van Ampère-Maxwell, 58
- wet van Biot-Savart, 53
- wet van Coulomb, 4
- wet van Curie, 61
- wet van Gauss voor magnetische velden, 58
- wet van reflectie, 67, 69
- Wienfilter, 51
- wit licht, 70
- work-kinetic energy theorem, 47

- Young, 64

- zacht ferromagnetisch materiaal, 61
- zichtbaar spectrum [*visible spectrum*], 71