

Examen Wiskundige Logica 1Ma, juni 2009

Vraag 1. Bewijs dat \mathbf{PA}_0 essentieel onbeslisbaar is.

Vraag 2. Aangaande de volledigheidstelling: in het bewijs van Stelling 1 op pagina 5 van Deel II, bewijs dat H voldoet aan voorwaarde 5 in Hintikka's Lemma.

Vraag 3. Aangaande het bewijs van de Stelling van Tennenbaum: leg in detail uit waarom de tweede gedisplayde formule op pagina 26 in Deel III (over onvolledigheid) geldig is.

Vraag 4. Zij M_n de registermachine met codegetal n . Zij A_i de verzameling

$$A_i = \{n \in \mathbb{N} \mid M_n \text{ bij input } n \text{ stopt na eindig stappen met output } i\},$$

voor eender welk natuurlijk getal i .

a/ Toon aan dat A_i algoritmisch opsombaar is.

b/ Toon aan dat A_i niet berekenbaar is.

c/ Bewijs de volgende bewering door gebruik te maken van a/. Er bestaan twee algoritmisch opsombare deelverzamelingen A en B van \mathbb{N} zodat $A \cap B = \emptyset$ en zodat er geen enkele *berekenbare* deelverzameling C van \mathbb{N} bestaat zodat $A \subset C$ en $C \cap B = \emptyset$.

Reservevraag: Construeer de Gödel zin, en bewijs zijn eigenschappen.