

**Examen Wiskunde II**  
**1ste bachelor Biochemie en Biotechnologie en Chemie**  
**maandag 23 augustus 2010, 14:00–18:30**

**Naam:**

**Studierichting:**

**Naam assistent(en):**

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; zonder los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent (Simon Allewaert, Carla Jacobs, Eva Leenknecht, Sven Raum, Kristof Schoels of Johan Van Kerckhoven).
- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** Zij  $A$  de matrix

$$A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$$

met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ p \end{pmatrix}$$

met  $p$  een vast reëel getal.

- (a) Voor welke  $p \in \mathbb{R}$  zijn de vectoren lineair afhankelijk ?
- (b) Bereken de oppervlakte van het parallellogram dat opgespannen wordt door  $\vec{b}$  en  $\vec{c}$ .  
Voor welke  $p$  is deze oppervlakte minimaal?
- (c) Geef alle oplossingen  $\vec{x} = (x \ y \ z)^T$  van

$$A\vec{x} = A^T\vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

waarin  $A^T$  de getransponeerde matrix is.

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 2** Beschouw een model voor de populatie van twee soorten virussen  $X$  en  $Y$ . Het aanwezige aantal van soort  $X$  na  $n$  weken geven we aan met  $x_n$  en dat van soort  $Y$  met  $y_n$ . We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + qy_n \quad \text{en} \quad y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + y_n.$$

Hierin is  $q \in \mathbb{R}$  een constante.

- (a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van  $q$ ).
- (b) Voor welke waarden van  $q \in \mathbb{R}$  treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?
- (c) Voor welke  $q$  is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als  $a_0 = 2010$  en  $b_0 = 0$ .

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 3** Neem aan dat de temperatuur  $T(t)$  van een zeker object voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{2}(T_{omg} - T)^3$$

waarin  $T_{omg}$  de (constante) omgevingstemperatuur is en  $\kappa > 0$  een constante.

- (a) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.
- (b) Neem aan dat  $T_{omg} = 10$  en dat  $T(0) = 0$  en  $T(1) = 5$ . Bereken hieruit  $\kappa$ .
- (c) Wanneer is de temperatuur gelijk aan 8?

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 4** Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = e^{-2t}$$

die voldoet aan

$$x(0) = 0 \quad \text{en} \quad x'(0) = 0.$$

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 5** (a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

Voor welke  $x \in \mathbb{R}$  is de reeks convergent?

(b) De  $2\pi$  periodieke functie  $g(x)$  is oneven en wordt op het interval  $]0, \pi[$  gegeven door

$$g(x) = \cos x, \quad 0 < x < \pi.$$

Schets de grafiek van deze functie.

(c) Bereken de Fourierreeks van de functie  $g(x)$  uit onderdeel (b).

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 6** Zij  $D$  het gebied dat in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$D : \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \leq r < +\infty.$$

(a) Schets  $D$ .

(b) Bereken

$$\iint_D \frac{1}{y(x^2 + y^2)} dA$$

---

**Antwoord:**