

**Examen Wiskunde II**  
**Bachelor Biochemie & Biotechnologie**  
**Bachelor Chemie**  
**vrijdag 10 juni 2011, 8:30–13:00**

**Naam:**

**Studierichting:**

**Naam assistent(en):**

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Wouter Castryck, Christophe Debry, Eva Leenknecht, Berdien Peeters, Kristof Schoels).
- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** Beschouw de vectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

en de matrix

$$A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Hierin is  $a$  een reële constante.

- (a) Beredeneer (zonder berekening uit te voeren) dat voor de waarden  $a = 0$ ,  $a = 2$  en  $a = 4$  de matrix  $A$  niet inverteerbaar is.
- (b) Bereken de oppervlakte van de driehoek met  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  en  $\vec{c}$  als hoekpunten.
- (c) Voor welke waarden van  $a$  liggen de drie vectoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  en  $\vec{c}$  op één rechte?

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 2** Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- (a) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ .
- (b) Geef alle  $p \geq 0$  waarvoor de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestaat en bereken deze limiet. [De limiet mag ook gelijk aan  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  zijn.]

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 3** De populatie  $x(t)$  van soort  $X$  voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \sin t$$

- (a) Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking.
- (b) Voor welke beginwaarden  $x(0) > 0$  blijft de oplossing begrensd voor alle  $t \geq 0$  ?

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 4** Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y(x - 2) \\ \frac{dy}{dt} &= y^2 - 3y + ax\end{aligned}$$

met  $a$  een reële parameter.

- (a) De oorsprong is altijd een evenwichtspunt van dit stelsel. Onderzoek voor welke  $a$  de oorsprong een stabiel evenwicht is. Voor welke  $a$  treedt spiraliserend gedrag op rond de oorsprong?
- (b) Neem  $a = 1$  en bereken de overige evenwichtspunten (verschillend van de oorsprong) en bepaal hun stabiliteit.

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 5** (a) Bereken de Maclaurinreeks van de functie

$$f(x) = \frac{1}{P_2(x)}$$

waarin  $P_2$  de Legendre veelterm van graad 2 is.

[Als de volledige reeks niet lukt, bereken dan de eerste drie niet-nul termen.]

(b) Bereken de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} x^{2k+1}.$$

---

**Antwoord:**

**Naam:**

**Vraag 6** Het gebied  $D$  in het eerste kwadrant wordt begrensd door de cirkel  $x^2 + y^2 = R^2$ , de rechte  $x = cy$  en de  $x$ -as. Hierin zijn  $R > 0$  en  $c > 0$ .

- (a) Schets het gebied  $D$ .
- (b) Beschrijf het gebied in poolcoördinaten
- (c) Bereken de integraal

$$I = \iint_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$$

---

**Antwoord:**