

Examen Wiskunde II
Bachelor Biochemie & Biotechnologie en Chemie
maandag 11 juni 2012, 8:30–13:00
Auditorium 200C. Aud A en 200 C. Aud B

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; géén extra toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent(en) (Simon Allewaert, Bart Jacobs, Michael Moreels, Berdien Peeters, Kristof Schoels).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $p \in \mathbb{R}$ en

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \quad \text{en} \quad A = \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix}.$$

(a) Voor welke waarden van p is de matrix A inverteerbaar?

[U hoeft de inverse matrix A^{-1} niet uit te rekenen.]

(b) Bepaal p zodanig dat de drie vectoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} onderling loodrecht staan.

(c) Bepaal alle waarden van p waarvoor het stelsel

$$A\vec{x} = \vec{x}$$

een oplossing $\vec{x} \neq \vec{0}$ heeft.

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Zij

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} q \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

met $q \in \mathbb{R}$.

- (a) Bepaal q zodanig dat de drie vectoren linear afhankelijk zijn.
- (b) Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix}$$

voor de waarde van q die u in (a) gevonden hebt. Is de matrix B diagonaliseerbaar?

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Bij een chemische reactie $A + 2B \rightarrow 3C$ voldoen de concentraties $a(t)$, $b(t)$ en $c(t)$ van de stoffen A , B en C aan de differentiaalvergelijkingen

$$\frac{da}{dt} = -rab^2, \quad \frac{db}{dt} = -2rab^2, \quad \frac{dc}{dt} = 3rab^2$$

met $r > 0$ de reactieconstante. We nemen beginwaarden

$$a(0) = 1, \quad b(0) = 2, \quad \text{en} \quad c(0) = 0.$$

- (a) Laat zien dat $b - 2a$ en $c + 3a$ constant zijn in de tijd. Wat zijn die constante waarden?
(b) Laat zien dat de differentiaalvergelijking voor a geschreven kan worden als

$$\frac{da}{dt} = -4ra^3$$

en los deze differentiaalvergelijking op.

- (c) Bereken

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t).$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 In een gebied met marters en woelmuizen ontwikkelen de twee populaties zich volgens de vergelijkingen

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{3xy}{x+1} \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + \frac{3xy}{x+1}\end{aligned}$$

met $K > 0$.

- (a) Welke van de twee veranderlijken x en y heeft betrekking op de populatie van de marters (de roofdieren) en welke op die van de woelmuizen (de prooidieren) ?
- (b) Bereken de evenwichtspunten van dit stelsel. Voor welke $K > 0$ is er een evenwicht (x_0, y_0) met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$?

De verdere vragen betreffen het evenwichtspunt uit onderdeel (b) met $x_0 > 0$ en $y_0 > 0$.

- (c) Laat zien dat het gelineariseerde stelsel voor dit evenwicht gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} \xi'(t) \\ \eta'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2K-10}{3K} & -2 \\ \frac{K-2}{3K} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$$

- (d) Voor welke K treedt spiraliserend gedrag op van de oplossingen rond het evenwichtspunt?
- (e) Onderzoek de stabiliteit van het evenwichtspunt. U mag u hierbij beperken tot de waarden van K waarvoor spiraliserend gedrag optreedt.

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 We beschouwen de functie

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{als } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{elders,} \end{cases}$$

en haar Fouriergetransformeerden $u(y)$ en $v(y)$ in de goniometrische vorm zoals gegeven door formules (5.2.3) uit de cursus.

(a) Laat zien dat

$$v(y) = \frac{2}{\pi} \frac{y}{1-y^2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

(b) Bepaal $u(y)$.

(c) Gebruik (a) en (b) om de integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{y \sin(\pi y)}{1-y^2} dy$$

te berekenen.

[Hint: Denk aan de inverse Fouriertransformatie (5.2.4) en bedenk ook dat $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$.]

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 Beschouw het gebied D dat in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$D : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}.$$

- (a) Beschrijf D in Cartesische xy -coördinaten en schets D .
- (b) Neem aan dat D een metalen plaat bevat met massadichtheid

$$\rho(x, y) = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Bereken de totale massa van D .

Antwoord: