

**Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
Bachelor Fysica**

vrijdag 26 augustus 2016, 14-17 uur

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:
Vraag 1: (a) 2 pt (b) 3 pt (c) 5 pt
Vraag 2: (a) 6 pt (b) 2 pt (c) 2 pt
Vraag 3: (a) 4 pt (b) 4 pt (c) 2 pt
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie.

(a) Geef de definitie van $f^{-1}(B)$ als $B \in P(Y)$.

(b) Bewijs dat

$$B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$$

geldt voor alle $B_1, B_2 \in P(Y)$.

(c) Bewijs dat

$$\forall B_1, B_2 \in P(Y) : f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subset B_2$$

geldt als en slechts als f surjectief is.

Naam:

Vraag 2 Voor een verzameling X noteren we met $\text{Fun}(X, \mathbb{Z})$ de verzameling van alle functies $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$. Op $\text{Fun}(X, \mathbb{Z})$ definiëren we een relatie R door te stellen dat $(f, g) \in R$ als en slechts als $\{f(x) - g(x) \mid x \in X\}$ een eindige verzameling is.

- (a) Bewijs dat R een equivalentierelatie is.
- (b) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is en neem voor f_0 de functie $f_0 : X \rightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto 0$. Is de equivalentieklasse $[f_0]_R$ van f_0 dan eindig, aftelbaar oneindig, of overaftelbaar. Motiveer uw antwoord.
- (c) Neem aan dat X een aftelbaar oneindige verzameling is. Is het aantal equivalentieklassen van R dan eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar? Motiveer uw antwoord.

Naam:

Vraag 3 De rij $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wordt gegeven door $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en

$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}, \quad \text{voor } k \geq 2.$$

- (a) Gebruik volledige inductie om te bewijzen dat $a_k \geq 3a_{k-1}$ geldt voor elke $k \geq 1$.
- (b) Bereken de voortbrengende functie van de rij (a_k) . Laat zien dat dit een rationale functie is. Wat is de teller en wat is de noemer?
- (c) Gebruik de voortbrengende functie om a_{2016} te berekenen.