

**Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren  
Bachelor Fysica, minor Wiskunde**

**vrijdag 28 augustus 2015, 14-17 uur**

**Auditorium L.00.06:** 3 studenten

**Naam:**

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:  
Vraag 1: (a) 10 pt  
Vraag 2: (a) 2 pt (b) 8 pt  
Vraag 3: (a) 6 pt (b) 4 pt
- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** Neem aan dat  $A$  en  $B$  niet-lege, begrensde deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$  zijn. We definiëren

$$A - B = \{x - y \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Bewijs dat

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B.$$

**Naam:**

**Vraag 2** (a) Geef de definitie van convergentie van een rij  $(a_n)$  van reële getallen.

(b) Bewijs met behulp van de definitie dat de rij  $(a_n)$  met

$$a_n = \frac{n + \cos(n)}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

convergent is.

**Naam:**

**Vraag 3** In deze vraag zijn  $(a_n)$  en  $(b_n)$  twee begrensde reële rijen met  $a_n \geq 0$  en  $b_n \geq 0$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Bewijs dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) \leq \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat gelijkheid in onderdeel (a) niet hoeft te gelden.

[N.B. In het originele examen was er een fout in de vraagstelling. De aanname dat  $b_n \geq 0$  ontbrak.]