

**Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren**  
**Bachelor 1ste fase Wiskunde + TWIN programma**  
**vrijdag 30 januari 2015, 8:30–12:30**

**Auditorium L.00.07:** 50 studenten

**Naam:**

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Kladbladen worden niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:      (a) 3 pt      (b) 2 pt      (c) 5 pt

Vraag 2:      (a) 3 pt      (b) 3 pt      (c) 4 pt

Vraag 3:      (a) 3 pt      (b) 3 pt      (c) 2 pt      (d) 2 pt

Vraag 4:      (a) 2 pt      (b) 8 pt

Vraag 5:      (a) 5 pt      (b) 5 pt

- Succes!

**Naam:**

**Vraag 1** Zij  $X$  en  $Y$  niet-lege verzamelingen en  $f : X \rightarrow Y$  een functie.

(a) Bewijs dat voor deelverzamelingen  $A_1$  en  $A_2$  van  $X$  geldt

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2).$$

(b) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de andere implicatie

$$f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2$$

niet altijd geldt.

(c) Bewijs dat

$$\forall A_1 \in P(X) : \forall A_2 \in P(X) : [f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2]$$

geldt als en slechts als  $f$  injectief is.

**Naam:**

**Vraag 2** Zij  $X$  en  $Y$  twee niet-lege verzamelingen en  $f : X \rightarrow Y$  een functie. We definiëren een relatie  $R_f$  op  $X$  door

$$(x_1, x_2) \in R_f \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

(a) Bewijs dat  $R_f$  een equivalentierelatie is.

(b) Bewijs dat

$$\mathcal{P}_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\} \setminus \{\emptyset\}$$

een partitie van  $X$  is.

(c) Neem aan dat  $f : X \rightarrow Y$  en  $g : X \rightarrow Y$  twee functies zijn. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

(1) Er bestaat een functie  $\sigma : Y \rightarrow Y$  met  $\sigma \circ f = g$ .

(2)  $R_f \subset R_g$

**Naam:**

**Vraag 3** Neem aan dat  $(a_n)$  een reële rij is die voldoet aan

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \quad \text{voor } n \geq 0.$$

Definieer dan

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bereken de voortbrengende functie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

voor het geval dat  $a_0 = 1$  en  $a_1 = 1$ . Gebruik dit om  $a_k$  te berekenen voor  $k = 2015$ .

(b) Neem nu aan dat  $a_1 \geq a_0 > 0$ . Bewijs met volledige inductie dat  $2 < b_n < 4$  geldt voor alle  $n \in \mathbb{N}$  met  $n \geq 2$ .

Hint: merk op dat  $b_0 \geq 1$  en bewijs eerst dat  $2 < b_1 \leq 5$ .

(c) Er geldt dat

$$b_{n+1} = F(b_n) \quad \text{met} \quad F(x) = 2 + \frac{3}{x}.$$

Laat zien dat de beperking van  $F$  tot  $[2, \infty)$  een contractie op  $[2, \infty)$  is.

(d) Is het mogelijk om met behulp van de contractiestelling te bewijzen dat de rij  $(b_n)$  convergent is? Leg uit.

**Naam:**

**Vraag 4** (a) Geef de definitie van convergentie van een rij reële getallen.

(b) Bewijs met de definitie dat de rij  $(a_n)$  met

$$a_n = \frac{4n^2 + n \sin(\omega n)}{5 - n^2}$$

convergent is. Hierin is  $\omega$  een vast gekozen reëel getal.

**Naam:**

**Vraag 5** Zij  $(a_n)$  een begrensde rij van reële getallen. We definiëren een nieuwe rij  $(b_n)$  door

$$b_n = \max\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \quad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Bewijs dat de rij  $(b_n)$  convergent is.
- (b) Geldt er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad ?$$

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.