

Examen Wiskunde II
1ste bachelor Geologie
maandag 8 juni 2009, 8:30–13:00

Naam:

Studierichting:

Naam assistent(en):

- Het examen bestaat uit 6 vragen. Elke vraag telt even zwaar mee.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- U mag gebruik maken van de cursus (Wiskunde I én Wiskunde II; zonder los toegevoegde bladen) en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent (Eva Leenknecht, Leen Prenen of Christophe Smet).
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij A de matrix

$$A = (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$$

met kolomvectoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p \end{pmatrix}$$

met p een vast reëel getal.

- (a) Bereken het volume van het parallellepipedum dat opgespannen wordt door \vec{a} , \vec{b} en \vec{c} .
Voor welke p is het volume minimaal?
- (b) Zij $\vec{x} = (x \ y \ z)^T$ een vector die voldoet aan

$$A\vec{x} \times \vec{c} = \vec{0}, \quad A\vec{x} \cdot \vec{b} = 1.$$

Zet deze voorwaarden om in een stelsel vergelijkingen voor x , y en z . Geef de matrix van dit stelsel en los op. Voor welke waarden van p is het stelsel strijdig, wanneer is er een unieke oplossing en wanneer zijn er oneindig veel oplossingen

- (c) Voor welke waarden van p zijn alle eigenwaarden van A reëel ?

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Beschouw een model voor de populatie van twee diersoorten A en B in een zeker gebied. Het aanwezige aantal van soort A na n maanden geven we aan met a_n en dat van soort B met b_n . We nemen aan dat de populaties zich ontwikkelen volgens de vergelijkingen

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + qb_n \quad \text{en} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}qa_n.$$

Hierin is $q \geq 0$ een constante.

- (a) Schrijf de vergelijkingen in matrix-vectorvorm en bereken de determinant en de eigenwaarden van de optredende matrix (als functie van q).
- (b) Voor welke waarden van $q \geq 0$ treedt exponentiële groei op en voor welke waarden sterven de populaties uit?
- (c) Voor welke q is er een evenwichtspopulatie? Bereken de evenwichtspopulatie als $a_0 = 4000$ en $b_0 = 1000$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Bij een chemische reactie van de vorm



voldoen de concentraties $a(t)$ en $b(t)$ van stoffen A en B aan

$$\frac{da}{dt} = -2ra^2b, \quad \text{en} \quad \frac{db}{dt} = -ra^2b,$$

waarin $r > 0$ de reactieconstante is.

(a) Laat zien dat er een constante K bestaat zodanig dat

$$\frac{da}{dt} = -ra^2(a + K).$$

(b) Los deze differentiaalvergelijking op voor het geval $K = 0$. Neem $a(0) = 10$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 4 Bereken de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = \sin t$$

die voldoet aan

$$x(0) = 0 \quad \text{en} \quad x'(0) = 0.$$

Antwoord:

Naam:

Vraag 5 (a) Bereken de Fourierreeks van de 2π -periodieke functie f die op $[-\pi, \pi]$ gegeven wordt door

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq |x| < \pi/2, \\ 1 & \text{als } \pi/2 \leq |x| \leq \pi. \end{cases}$$

(b) Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is de Fourierreeks convergent? Wat is de waarde van de Fourierreeks in $x = 5/2\pi$?

Antwoord:

Naam:

Vraag 6 Zij S het deel van het boloppervlak $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = R^2$ met $z \geq 0$. Hierin is $R > 1$. We zijn geïnteresseerd in de integraal

$$I = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

waarin \vec{n} de naar buiten wijzende normaal op S is. \vec{F} is het vectorveld

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, -e^{-xyz}).$$

(a) Gebruik de stelling van Stokes twee keer om aan te tonen dat

$$I = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{e}_3 dx dy \tag{1}$$

waarin D de schijf $x^2 + y^2 \leq R^2 - 1$ is en $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

(b) Laat zien dat de divergentiestelling (stelling van Gauss) ook gebruikt kan worden om de gelijkheid (1) aan te tonen.

(c) Bereken $\operatorname{rot} \vec{F}$.

(d) Bereken I .

Antwoord: