

# ALGEBRAÏSCHE GETALTHEORIE

(22/06/2011 (14u-18u))

(1) Gesloten boek, niet mondeling:

- a) Zij  $K$  een getallenveld en zij  $A$  een niet-nul ideaal in  $\mathcal{O}_K$ . Bewijs dat  $\mathcal{O}_K/A$  eindig is.
- b) Zij  $R$  een UIFD en veronderstel dat elk niet-nul priemideaal van  $R$  een maximaal ideaal is. Bewijs dat elk niet-nul priemideaal van  $R$  een invertibel fractioneel ideaal is.

(2) Verklaar de volgende overgangen in de cursustekst:

- (a) Op p.62: “Het is duidelijk dat  $\theta$  een injectief homomorfisme van groepen is.”
- (b) Het bewijs van 8.7 op p.64: “Uit Stelling 3.4.6 volgt dat  $M$  een priemideaal is.”
- (c) In het bewijs van Eigenschap 3.4.7 op p.29: leg uit waarom de formule juist boven formule (3.4) volgt uit het feit dat elk getal dat onderling ondeelbaar is met  $p$  een eenheid is in  $\mathbb{Z}_p$ .

(3) (a) Toon aan dat  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$  een cyclotoom veld is. Gebruik dit om een integrale basis voor dit getallenveld te berekenen en om alle priemgetallen te bepalen die volledig splitsen in  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ . We zeggen dat een priemgetal  $p$  volledig splitst in een getallenveld  $K$  als het aantal priemidealen van  $\mathcal{O}_K$  boven  $p$  gelijk is aan de graad van  $K$  over  $\mathbb{Q}$ .

(b) Zij  $p > 2$  een priemgetal en zij  $\xi$  een primitieve  $p$ -de eenheidswortel. Bewijs voor  $s = 1, \dots, p-1$  dat

$$\sqrt{\frac{1 - \xi^s}{1 - \xi} \cdot \frac{1 - \xi^{-s}}{1 - \xi}}$$

een eenheid is in  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\xi)} \cap \mathbb{R}$ .

(4) Zij  $K_1$  en  $K_2$  getallenvelden, beiden Galois over  $\mathbb{Q}$ , en zij  $p$  een priemgetal. Zij  $K_1K_2$  het kleinste deelveld van  $\mathbb{C}$  dat  $K_1$  en  $K_2$  bevat. Bewijs:

- (a) Als  $p$  niet geramificeerd is in zowel  $K_1$  als  $K_2$ , dan is  $p$  niet geramificeerd in  $K_1K_2$ .
- (b) Als  $p$  volledig splitst in zowel  $K_1$  als  $K_2$ , dan splitst  $p$  volledig in  $K_1K_2$ .