

# Examenvragen D0H45 (Lineaire optimalizatie)

Tijdstip: Vrijdag 3 februari 2012 vanaf 09.00 uur tot 12.00 uur

Er zijn vier opgaven. Achter de opgaven zitten de bladzijden die u kunt gebruiken om uw antwoord te geven. Er is geen giscorrectie. Een rekenmachine is niet toegelaten.

Tips:

- Lees aandachtig!
- **Schrijf duidelijk!**
- Vermeld uw naam!
- **SCHRIJF DUIDELIJK!!!**

SUCCES!

$$\begin{array}{r} z \\ x_B \end{array} = \frac{\begin{array}{r} c_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{array} + \frac{(c_N - c_B B^{-1} A_N) x_N}{- B^{-1} A_N x_N}}{}$$

### Opgave 1.

Brouwerij Bubbel produceert twee soorten bier: blond en donker. De vraag naar beide biersoorten is bekend: met  $d_t^B$  wordt de vraag naar het aantal liter blond bier in week  $t$  weergegeven, en met  $d_t^D$  wordt de vraag naar het aantal liter donker bier in week  $t$  voorgesteld,  $t = 1, 2, \dots, T$ . Het bier wordt gebrouwen in *tanks*, er is een tank voor het blonde bier, en er is een tank voor het donkere bier. Elke tank kan ten hoogste  $C$  liter bevatten. Een eigenschap van deze tanks is verder dat hun *relatieve inhoud* niet teveel van elkaar mag verschillen (de relatieve inhoud van een tank is het aantal liters in de tank gedeeld door de capaciteit van de tank). Meer precies: er mag niet meer dan 10% verschil tussen de relatieve inhouden van beide tanks zijn. Tenslotte is het mogelijk bier op te slaan; de totale opslagcapaciteit in week  $t$  bedraagt  $D$  liter. Het opslaan van een liter blond bier kost  $h^B$  (per week), en  $h^D$  voor een liter donker bier (per dag). Het produceren van een liter blond bier in week  $t$  kost  $c_t^B$ , het produceren van een liter donker bier kost  $c_t^D$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ . We gaan ervan uit dat bier geproduceerd in periode  $t$  gebruikt kan worden om aan de vraag van periode  $t$  te voldoen.

- a. Formuleer het probleem om de kosten te minimaliseren als een lineair optimaliseringsprobleem.
- b. Stel dat in elke periode  $t$ , 10% van de totale vraag in die periode (dus  $0,1 \times (d_t^B + d_t^D)$ ) door eender welk bier vervuld kan worden. Hoe ziet de formulering er dan uit?

In het geval dat de hierboven beschreven situatie dubbelzinnig lijkt, of niet volledig duidelijk is, maak dan een redelijke veronderstelling die u toelaat om verder te werken, en motiveer uw veronderstelling.

**Opgave 2.**

Los het volgende probleem op met de twee-fasen methode:

$$\begin{array}{rccccrcr} \min & -3x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{odb} & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 3 \\ & & & & & x_1 & \leq & 0, \quad x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Als er meerdere variabelen in aanmerking komen om in de basis te brengen, kies dan die variabele met de grootste coëfficiënt in de  $z$ -rij (en als daar meerdere mogelijkheden voor zijn, kies dan die variabele met de kleinste index). Als er meerdere variabelen uit de basis genomen kunnen worden, kies dan die variabele met de laagste index.

- a. Herformuleer dit probleem in standaardvorm.

Op de volgende bladzij staan een aantal dictionairs.

- b. Geef aan, door middel van het zetten van een “1” vòòr een dictionair, welk dictionair het laatste dictionair van de eerste fase is.
- c. Geef aan, door middel van het zetten van een “2” vòòr een dictionair, welk dictionair het laatste dictionair van de tweede fase is.
- d. Welke van de opgelijste dictionairs a-h correspondeert met een onbegrensde oplossing? Geef dit aan, door het zetten van een “O” vòòr de betreffende dictionair(s).
- e. Welke van de opgelijste dictionairs a-h correspondeert met een gedegenereerde oplossing? Geef dit aan, door het zetten van een “G” vòòr de betreffende dictionair(s).

$$\textcircled{a} \quad \begin{array}{r} w = \\ \hline x_4 = 1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_0 \\ x_5 = 3 - x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_1 = 1 - \frac{3}{x_2} - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_0 \end{array}$$

$$\textcircled{b} \quad \begin{array}{r} w = \\ \hline x_4 = 1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_0 \\ x_5 = 3 - x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_1 = 1 - \frac{3}{x_2} - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 - \frac{1}{3}x_0 \end{array}$$

$$\textcircled{c} \quad \begin{array}{r} w = \\ \hline x_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_0 \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_6 + \frac{3}{2}x_0 \\ x_5 = -3x_1 - x_6 + 2x_0 \end{array}$$

$$\textcircled{d} \quad \begin{array}{r} w = \\ \hline x_3 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_0 \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_6 + \frac{3}{2}x_0 \\ x_5 = -3x_1 - x_6 + 2x_0 \end{array}$$

$$\textcircled{e} \quad \begin{array}{r} z = 3 - 3x_2 - 2x_3 - x_6 \\ \hline x_4 = 1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_5 = 3 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \end{array}$$

$$\textcircled{f} \quad \begin{array}{r} z = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_6 \\ \hline x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 \end{array}$$

$$\textcircled{g} \quad \begin{array}{r} z = 2 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4 - \frac{5}{2}x_6 \\ \hline x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 \end{array}$$

$$\textcircled{h} \quad \begin{array}{r} z = -3 + 3x_2 - 2x_3 - x_6 \\ \hline x_4 = 1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_5 = 3 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_6 \end{array}$$



#### Opgave 4.

Beschouw een drietal universiteiten. Elk van deze universiteiten wordt gefinancierd door de centrale overheid. Daarnaast ontvangt elke universiteit een bedrag van haar alumni. Beide bedragen zijn dus inputs voor een universiteit. We onderscheiden verder drie outputs: aantal geslaagde studenten per jaar, aantal wetenschappelijke publicaties per jaar, en aantal persoptredens van medewerkers in een jaar. Al deze gegevens zijn te vinden in onderstaande tabel.

	Centrale Overheid (in miljoen euro)	Alumni-bijdrage (in miljoen euro)	aantal studenten	aantal publicaties	aantal persoptredens
Univ 1	15	10	3000	1500	30
Univ 2	20	3	2500	2500	30
Univ 3	8	2	1500	500	10

Tabel 1: Inputs en outputs van universiteiten

- Stel een LO-formulering op waarmee data envelopment analyse (DEA) toegepast kan worden op universiteit 1.
- Beschouw het geval dat geen van de drie outputs verwaarloosd mag worden. Meer concreet, elk gewicht toegekend aan een output moet tenminste 10% bedragen van de som der outputgewichten. Ook mag een individueel outputgewicht niet meer dan 60% van de som der outputgewichten zijn. Stel een LO-formulering op voor universiteit 2.
- Uit het oplossen van de LO-formuleringen blijkt dat universiteit 2 niet efficiënt is. Leg uit hoe we een streefdoel voor deze universiteit kunnen opstellen.