

# Examen Numerieke Wiskunde

10 juni, namiddag

## 1 Vraag 1: lineaire stelsels en fouten enzo

Gegeven is een hoop MATLAB invoer en uitvoer (in Command Window).  
Meer bepaald:

Er werd een vector  $Y$  berekend als benadering voor de oplossing van het stelsel  $AX = b$ . Dus  $A$ ,  $b$ ,  $Y$  zijn bekend voor MATLAB maar staan nergens expliciet weergegeven. Men berekende nog de residuvector  $R = AY - b$  en de  $QR$ -factorisatie van  $A$  (beide werden niet expliciet getoond). Verder werden enkele getalwaarden opgevraagd:

- $\|R\| = 1.7092 \cdot 10^{-15}$
- $\|A\| = 5.5766$
- $\|B\| = 6.4270$
- $\mathcal{K}(A) = 1.9396 \cdot 10^{11}$
- $\det(Q) = -1$
- De diagonaalelementen van  $R$  zijn:
  - $-4.2114$
  - $-2.2068$
  - $-2.9829$
  - $-2.1455$
  - $-3.3719$
  - $-9.3602 \cdot 10^{-1}$
  - $-1.2984$
  - $-1.3546$
  - $1.0019 \cdot 10^{-10}$

Daarmee moet je de volgende vragen oplossen:

1. Wat is de nauwkeurigheid van  $Y$ ?
2. Is de berekende  $Y$  de exacte oplossing van een nabijgelegen probleem?
3. Kan je  $\det(A)$  berekenen/schatten? Zo ja, geef een schatting voor  $\det(A)$
4. Kan je  $\|A^{-1}\|$  berekenen? Zo ja, geef een schatting voor  $\|A^{-1}\|$ .

Bijvraagje: als je  $\det(A)$  correct hebt berekend, vind je dat die heel klein is (hint: je kan hem dus berekenen). Kan je hieruit iets afleiden over de conditie?

## 2 Vraag 2: een kwadratuurformule

Gegeven de kwadratuurformule:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx H_1 f(1) + H_0^* f'(0) + H_1^* f'(1)$$

Bepaal de gewichten  $H_1$ ,  $H_0^*$ ,  $H_1^*$  zodat de nauwkeurigheidsgraad zo hoog mogelijk is. Wat is de nauwkeurigheidsgraad?

## 3 Vraag 3: een substitutiemethode

We beschouwen de substitutiemethode met  $F(x) = -e^{-a^2 x^2}$ , met  $a \in \mathbb{R}$ . Bepaal voor elke waarde van  $a$  de vaste punten en of de methode convergeert/divergeert. Indien convergentie, bepaal de orde en indien lineair, bepaal de convergentiefactor. Geef in het geval van convergentie ook alle startwaarden waarvoor de methode convergeert. Een grafische uitleg volstaat.

## 4 Vraag 4: Newton-Raphson

Gegeven is heel veel Maple-code en grafieken in verband met het oplossen van een stelsel niet-lineaire vergelijkingen. De vergelijkingen waren:

$$\begin{cases} x^2 + (y - 2)^2 - 3.7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

De gebruikte startvector was  $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Er werd een grafiek gegeven met daarop de twee vergelijkingen en de opeenvolgende benaderingen voor het snijpunt in het eerste kwadrant (het stelsel heeft twee oplossingen, het andere werd niet besproken). Voor het derde deel van deze vraag werd ook de grafiek van de relatieve fout gegeven.

Daarmee moet je volgende vragen oplossen:

1. Op de figuur (die ik helaas niet kan tonen, MAPLE-fans mogen deze uiteraard altijd proberen te reproduceren) zie je dat vanaf de tweede iteratie alle iteratiepunten op een horizontale lijn liggen. Hoe komt dat?
2. Voor welke startwaarden en iteratiepunten zal de Newton-Raphson methode niet werken?
3. Wat kan je aan de hand van de foutengrafiek (die ik helaas niet kan tonen, MAPLE-fans mogen deze uiteraard altijd proberen te reproduceren) zeggen over de orde van de convergentie? Komt dit overeen met wat je weet over de orde van convergentie van de Newton-Raphson methode? (het tweede deel kan je beantwoorden zonder de grafiek, en de grafiek bevestigde de theoretische orde)