

Tussentijdse toets
G0U13 - Bewijzen en Redeneren

bachelor in de Wiskunde, bachelor in de Fysica,
bachelor in de Economische Wetenschappen en
bachelor in de Wijsbegeerte

Vrijdag 12 november 2010, 10u30 - 12u30

Naam:
Jaar en richting:

- Geef je antwoorden in volledige, goed lopende zinnen, en wees nauwkeurig in je redeneringen en formuleringen.
- Begin voor elke vraag je antwoord op een nieuw blad. Schrijf op elk blad je naam!
- Voor de vragen 2, 3 en 4 mag je alle resultaten uit de cursus gebruiken, als je ze duidelijk vermeldt.
- Geef enkel je echte antwoorden af, met dit opgavenblad vooraan; kladpapier geef je niet af.

Vraag 1.

Zij X en Y verzamelingen en $f : X \rightarrow Y$ een inverteerbare functie. Toon aan dat f surjectief is.

Vraag 2.

Stel dat X en Y eindige verzamelingen zijn met elk minstens drie elementen. Zij $f : X \rightarrow Y$ een functie en stel dat voor elke $y, y' \in Y$ met $y \neq y'$ geldt dat

$$|f^{-1}(\{y, y'\})| \leq 2.$$

Toon aan dat f injectief is. Geldt dit ook als X maar 2 elementen telt?

Vraag 3.

Definieer de rij van Fibonacci F_0, F_1, F_2, \dots door de volgende recursierelatie:

$$F_0 = F_1 = 1, \text{ en voor elke } n \in \mathbb{N}:$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Deze rij begint dus als 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots . Bewijs door middel van volledige inductie dat voor elke $n \geq 1$ het element F_{4n-1} deelbaar is door 3.

Vraag 4.

Beschouw de relatie R op de verzameling $X = \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$, die als volgt gedefinieerd wordt: $(x, y) \in R$ als en slechts als $xy = m^2$ voor een $m \in \mathbb{N}$.

- (a) Toon aan dat R een equivalentierelatie is.
- (b) Geef 3 elementen uit de equivalentieklasse $[6]$.
- (c) Is het aantal equivalentieklassen eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig? En is het aantal elementen in elke klasse eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig? Het is voldoende tweemaal te antwoorden met de juiste kardinaliteit, je hoeft niets te bewijzen.
- (d) We maken nu een kleine aanpassing: beschouw de relatie R' , op dezelfde wijze als R gedefinieerd, maar nu op de verzameling $X' = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Toon aan dat deze nieuwe relatie R' **geen** equivalentierelatie is.

Succes!