

Examen Complexe functies
23 augustus 2018

Schrijf je naam op alle bladen en geef ze allemaal af. Je hebt vier uur tijd. Veel succes!

We gebruiken de notatie $S_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ voor open schijven met straal r en middelpunt 0 .

Vraag 1) Beantwoord elke vraag zeer bondig. Je krijgt geen punten voor de uitleg. Bij 'classificeer de singulariteit' kies je uit 'pool van n 'de orde' (geef ook n), 'verwijderbare sing.', 'essentiele sing.', 'niet-geïsoleerde sing.'

1. Zij $a > 0$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $z^5 = -a^5$ in \mathbb{C} .

2. Welke $z \in \mathbb{C}$ voldoen aan $|z + 1| \leq |z - 1|$?

3. Voor welke $z \in \mathbb{C}$ is $\cos z$ reel?

4. Classificeer de singulariteit in $z = 0$ van $\frac{1}{\sqrt{z}}$.

5. Classificeer de singulariteit in $z = 0$ van $\frac{z^2}{z^2 - \sin(z^2)}$.

6. Classificeer de singulariteit in $z = 0$ van $z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

7. f heeft een pool van tweede orde in $z = 0$ en is analytisch in $S_2 \setminus \{0\}$.

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

A) Er is een g , analytisch op S_2 , en $a \in \mathbb{C}$ zodat $f(z) = \frac{a}{z^2} + g(z)$.

B) Er is een g , analytisch op S_2 zodat $f(z) = \frac{g(z)}{z^2}$.

C) $\oint_{C_1} f(z) dz = 0$ (C_1 is de cirkel met straal 1)

D) De functie $g(z) \equiv z^3 f(z)$ voldoet aan $g(0) = 0$.

8. Zij γ_1 en γ_2 twee paden in \mathbb{C} gegeven door $\gamma_1(t) = e^{it}$ en $\gamma_2(t) = e^{-it}$, met $t \in [0, \pi]$. Zij $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ een complexe (eenwaardige) functie en noem $I_i := \int_{\gamma_i} dz f(z)$

Welke van de volgende uitspraken zijn waar?

A) Als $I_1 = I_2$, dan is f analytisch op S_1 .

B) Als $I_1 \neq I_2$, dan is er minstens een $z \in S_1$ zodat f niet analytisch is in z .

C) Als f slechts een enkele singulariteit heeft in S_1 , dan kan men het residu van deze singulariteit bepalen uit $I_1 - I_2$.

D) Als f niet analytisch is op γ_1 , dan is $|I_1| = +\infty$.

9. Wat is het residu van de functie $f(z) = (z - a)^2 e^{\frac{1}{z-a}}$ in $z = a$?

10. Wat is het residu van de functie $f(z) = \frac{(z+1/4)^2}{(z^2+1)^2}$ in $z = i$?

Bij de volgende vragen hoort wel een beetje uitleg, maar hou het kort. Die uitleg dient enkel om mij te laten zien dat je weet wat je doet en de voorziene ruimte zou zeker moeten volstaan.

Vraag 2) Zij $z = \frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}$. Vind $r \geq 0$ en $\theta \in [-\pi, \pi)$ zodat $z = re^{i\theta}$.

Vraag 3) Zij $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, met $z = x + iy$, een holomorfe functie, zodat $u(x, y) + 2v(x, y) = 3$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Geef alle f die hieraan beantwoorden.

Vraag 4)

De functie $\ln z$ is gedefinieerd als

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi)$$

a) Waar is deze functie analytisch?

b) Voor welke z_1, z_2 geldt de relatie

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$$

c) Wat is $\ln(z_1 z_2) - \ln(z_1) + \ln(z_2)$ wanneer deze relatie niet geldt?

Vraag 5)

Beschouw de machtreeks

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$$

- a) Wat is de convergentiestraal van deze reeks?
- b) Tot welk domein kan men f uitbreiden als een analytische functie?
- c) Zijn er geïsoleerde singulariteiten? Zoja, waar?

Vraag 6)

Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5}$$

met behulp van residuekening.