

## Kwantummechanica 2 BA fysica

(17 aug 2020; 9:00 - 12:00) Voornaam en naam:

Studenten nr.:

### 1 Theorie: Spontane emissie (8pt)

Volg de redenering van Einstein en bereken de formule voor het tempo van spontane emissie (van een foton) door een atoom in een aangeslagen toestand, in de dipoolbenadering. Vertrek van de kennis van het absorptietempo (aantal overgangen per seconde per atoom) van grondtoestand  $a$  naar aangeslagen toestand  $b$ ,

$$W_{ba}^{(absorptie)} = \frac{\pi \rho(\omega_{ba})}{3\hbar^2 \epsilon_0} \mathbf{D}_{ba} \cdot \mathbf{D}_{ba}^*, \quad (1)$$

met  $\rho$  de spectrale energiedichtheid per volume van het EM veld (Max Planck),

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1} \quad (2)$$

en  $\mathbf{D}_{ba}$  het matricelement van de elektron-dipooloperator,

$$\mathbf{D}_{ba} = \langle \psi_b | \mathbf{D} | \psi_a \rangle \quad (3)$$

Beschouw, zoals Einstein, drie processen en veronderstel dat de bezetting van de elektron-toestanden in thermisch evenwicht is bij temperatuur  $T$ .

### 2 Oefening 1: Variatierekening (6pt)

Beschouw de harmonische oscillator in de positieruimte-representatie met Hamiltoniaan  $H$ , d.w.z.

$$\langle x | H | \psi \rangle = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \psi(x) \quad (4)$$

Tracht de grondtoestandsenergie te vinden (of te benaderen) door variatierekening toe te passen op de volgende één-parameter familie van testfuncties

$$\psi_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2} \quad (5)$$

Wat besluit je? Wat kan je zeggen over de kwaliteit van de gevonden energiewaarde en de overeenkomstigste testfunctie. Tenslotte: welke familie testfuncties zou je best beschouwen als je de energie van de eerste aangeslagen toestand wil vinden of benaderen?

### 3 Oefening 2: Spin-baan koppeling (6pt)

Een deeltje met baanimpulsmoment-kwantumgetal  $\ell = 1$  en spin-kwantumgetal  $s = 1$  wordt beschreven door de Hamiltoniaan

$$W_{sb} = \alpha^2 E_I \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}}{\hbar^2}, \quad (6)$$

met  $\alpha \approx 1/137$ ,  $E_I = 13.6 \text{ eV}$  de Rydberg. Bepaal de energieniveaus (in  $eV$ ) alsook een genormeerde basis van eigentoestanden. Kijk na of er ontaarding optreedt. Een genormeerde basis van toestanden in de Hilbertruimte is  $\{|\ell, m\rangle \otimes |s, m_s\rangle\}$ . Je kan deze gebruiken om van te vertrekken.