

WISKUNDIGE METHODEN IN DE NATUURKUNDE

(27/01/2012 (14u-18u))

De vragen die mondeling verdedigd moeten worden, worden reeds na één uur bij iedereen opgehaald.

Discrete Symmetrieën

1) *Mondeling met schriftelijke voorbereiding.*

We labelen de vectoren van een orthonormale basis met de elementen van een eindige groep \mathcal{G} :

$$\langle e_{g_1}, e_{g_2} \rangle = \delta_{g_1, g_2}, \text{ of in Diracnotatie } \langle g_1 | g_2 \rangle.$$

De rechtsreguliere representatie R van \mathcal{G} is dan bepaald door

$$R(h)e_{g_1} := e_{gh^{-1}}, \text{ of in Diracnotatie } R(h)|g\rangle := |gh^{-1}\rangle.$$

1. Wat is de dimensie van de vectorruimte opgespannen door de vectoren e_g ?
2. Ga na dat R een unitaire representatie is van \mathcal{G} .
3. Bereken het karakter van R .
4. Met welke multipliciteit komt een irrep van \mathcal{G} voor in R ?

2) *Schriftelijk.*

Deze vraag gaat over een actie van de groep S_3 op de vectorruimte \mathcal{V} van de complexe homogene harmonische veeltermen in drie veranderlijken, x , y en z van graad twee. Voor alle duidelijkheid: het gaat hier over veeltermen $p(x, y, z)$ die lineaire combinaties zijn van x^2 , y^2 , z^2 , xy , xz en yz en die voldoen aan

$$0 = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}.$$

1. Wat is de dimensie van \mathcal{V} ? Kies een basis voor \mathcal{V} .
2. Permuteren van de veranderlijken x , y en z definieert een natuurlijke representatie R van S_3 op \mathcal{V} . Vind, voor de basis die je gekozen hebt, de matrixvoorstelling van een permutatie van orde twee (een spiegeling als je denkt in termen van symmetrieën van een gelijkzijdige driehoek) en van een permutatie van orde drie (een echte rotatie).
3. Bepaal het karakter van de representatie.
4. Bepaal de multipliciteiten van de irreps van S_3 in R .
5. Vind voor elke irrep die in R voorkomt een niet-triviale deelruimte van \mathcal{V} die invariant is onder deze irrep.

Potentiaaltheorie in 2D

1] *Mondeling met schriftelijke voorbereiding.*

Beschouw

$$F(z) = z + \ln z.$$

Bereken de Taylorreeks rond $z = 1$. Geef expliciet de eerste twee termen en daarna de algemene vorm. Gebruik hierbij

$$\frac{d^n F}{dz^n}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! z^{-n}, \text{ voor } n \geq 2.$$

Bepaal de convergentiestraal met de ratiotest van Cauchy.

2] *Schriftelijk.*

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx, \quad \text{met } k \text{ een reëel getal.}$$

1. We zullen de volgende formule gebruiken:

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum a_{-1}(z_+).$$

Wat betekent elk symbool hier?

2. Vind I , zul met andere woorden de formule hierboven aangepast in.

3. Toon aan dat je de formule mag gebruiken.

Welke integraal moet nul worden om de vergelijking af te leiden? Toon ook aan dat die integraal geen bijdrage levert.

4. Gebruik nu

$$\frac{1}{(x)_P} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \dots + \dots$$

Vervolledig de formule. Leg de keuze van tekens uit in de formule. Vind I aan de hand van de formule.

5. Nu zou je in staat moeten zijn om de volgende integraal te berekenen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx}{x} dx.$$

Waarom hoeft hier geen “ P ” te staan?

Markovprocessen

① *Mondeling met schriftelijke voorbereiding.*

Beschrijf hoe je een Markovproces in continue tijd kan opvatten als de limiet van een Markovketen in discrete tijd.

Wat versta je onder de generator van het proces? Leg meer bepaald uit hoe je kan herkennen dat een matrix een generator is van een Markovproces.

② *Schriftelijk.*

Beschouw een Markovproces x_t in continue tijd op $K = \{1, 2, 3\}$ met rates (stel per seconde)

$$k(1, 2) = 2, \quad k(2, 1) = 2 \quad k(1, 3) = 9, \quad k(3, 1) = 1, \quad k(2, 3) = 18, \quad k(3, 2) = a,$$

waar a een parameter is.

Stel dat we op tijd $t = 2$ een systeem in de toestand $x_2 = 2$ vinden. Geef een schatting van de tijd waarvoor het nog in die toestand blijft vooraleer te springen naar toestanden 1 of 3.

Bereken de kans dat $x_3 = 3$ op tijd $t = 3$ gegeven dat $x_2 = 2$ op tijd $t = 2$.

Bepaal een waarde voor a zo dat de dynamica detailed balance is.

◇ ◇ ◇