

WISKUNDIGE METHODEN IN DE NATUURKUNDE II
(10/06/2013 (9u-13u))

Perturbatieve technieken

1 *Mondeling met schriftelijke voorbereiding.*

Gegeven is een d -dimensionale Hermitische matrix met niet-ontaarde eigenwaarden

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}, \quad \text{als } j \neq k, \text{ dan } a_j \neq a_k,$$

en een d -dimensionale Hermitische matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1d} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & \cdots & b_{dd} \end{pmatrix}, \quad \text{met } b_{ji} = \overline{b_{ij}},$$

en een differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Bereken tot op eerste orde in $\varepsilon \in \mathbb{R}$ de eigenwaarden van $f(A + \varepsilon B)$.
- (b) Bereken de matrix $f(A + \varepsilon B)$ tot op eerste orde in ε .

2 *Mondeling met schriftelijke voorbereiding.*

Trillingen van kleine amplitude van een snaar worden beschreven door de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \text{met } 0 < x < L \text{ en } 0 < t.$$

Hierbij is c de voortplantingssnelheid van het geluid en worden er randvoorwaarden $u(0, t) = u(L, t) = 0$ opgelegd. De eigenfrequenties $f = \omega/2\pi$ van de snaar worden bepaald door de staande-golfoplossingen en dit komt neer op het oplossen van de volgende differentiaalvergelijking

$$-X''(x) = \omega^2 X(x) \quad \text{met } 0 < x < L \text{ en } X(0) = X(L) = 0. \quad (1)$$

- (a) Zoek een benadering van de laagste eigenfrequentie van de snaar door het variatieprincipe voor eigenwaarden van een Hermitische matrix te gebruiken en je te beperken tot veeltermen van graad kleiner of gelijk aan twee die aan de randvoorwaarden voldoen.
- (b) Krij je een boven- of ondergrens voor de frequentie van de grondtoon?
- (c) Hoe ver wijkt jouw benadering af van de exacte oplossing?

Dynamische systemen

1 *Schriftelijk.*

Schrijf een paper over twee gegeven systemen van twee keer twee bladzijden en geef die af op het examen. Mogelijke onderwerpen: Cat-afbeelding, Duffingvergelijking, van der Pol oscillator, Rösslersysteem. . .

2 *Schriftelijk.*

Beschouw de dynamica op \mathbb{R}^2 gegeven door

$$\begin{cases} \dot{x} &= -2 \cos x - \cos y \\ \dot{y} &= -2 \cos y - \cos x \end{cases} .$$

Toon aan in welke zin dat systeem reversibel is, maar niet conservatief.
Teken het faseportret.

3 *Schriftelijk.*

Beschouw de tentafbeelding

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x & \text{als } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Toon aan dat die afbeelding een periode-2-baan heeft. Is die stabiel of niet?
Deze afbeelding is chaotisch. Geef eerst de wiskundige definitie en dan de numerieke waarde van de Lyapunovexponent en verwoord in een paar lijnen dat dat betekent en hoe dat fysisch een tijdsschaal bepaalt.